

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Eduardo Vicente do Couto

*Sistemas de Amortização: uma abordagem para o ensino
médio regular*

Rio de Janeiro
2013

Eduardo Vicente do Couto

*Sistemas de Amortização: uma abordagem para o ensino
médio regular*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Programa de Pós-graduação em Matemática PROF-
MAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção
do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Gladson Antunes

Doutor em Matemática - UFRJ

Rio de Janeiro

2013

Couto, Eduardo Vicente do

Sistemas de Amortização: uma abordagem para o ensino médio regular / Eduardo Vicente do Couto - 2013

40.p

1. Matemática 2. Matemática Financeira. I. Título.

CDU 536.21

Eduardo Vicente do Couto

*Sistemas de Amortização: uma abordagem para o ensino
médio regular*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Programa de Pós-graduação em Matemática PROF-
MAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção
do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 08 de março de 2013

BANCA EXAMINADORA

Gladson Antunes

Doutor em Matemática - UFRJ

Ronaldo da Silva Busse

Doutor em Matemática - UFRJ

Helvécio Rubens Crippa

Doutor em Matemática - UFRJ

A minha esposa Sandra, pela paciência, pelo apoio afetivo, gastronômico e também por algumas correções de textos. Aos meus filhos Ugo e Júlia pelo incentivo e por compreender minhas ausências. Aos meus pais, Fernando e Tereza que, mesmo com dificuldades, sempre investiram na minha educação.

Resumo

É proposta uma forma de se trabalhar Sistemas de Amortização no ensino médio regular. Esse conteúdo, normalmente trabalhado nos cursos de matemática financeira de nível superior, com uso de calculadora financeira, pode ser trabalhado como uma aplicação dos conceitos de PA e PG, utilizando apenas uma calculadora científica. Dessa forma, trabalha-se a contextualização de uma forma não artificial, ou seja, quando ela realmente existe. O trabalho também propõe o uso da matemática para a formação de um cidadão mais consciente. Foram desenvolvidas duas atividades com os alunos da Escola SESC de Ensino médio. Na primeira atividade foi trabalhado o sistema de amortização constante. Na segunda foi trabalhada a tabela PRICE. Em seguida é feito um breve comentário sobre os sistemas de amortização com correção monetária e o mau uso dos conceitos da matemática financeira no Sistema Financeiro de Habitação. São citados os conteúdos de matemática financeira em alguns livros didáticos usados nas escolas de ensino médio. Esse Trabalho de Conclusão de Curso do Programa de Pós-graduação em Matemática PROF-MAT da UNIRIO foi desenvolvido em conjunto com o trabalho de Carolina Bonisson. No trabalho desenvolvido pela Carolina, além da citação de outros livros didáticos, foram desenvolvidas as planilhas de pagamentos do SAC e Tabela Price no software gratuito Geogebra.

Palavras-chaves: Amortização, Contextualização, Inovação, Conscientização.

Abstract

This paper proposes a way of working Amortization Systems into regular high school curriculum. Amortization, usually taught in financial mathematics courses at the tertiary level, can be taught as an application of the concepts of Arithmetical Progression and Geometric Progression using only a scientific calculator. By doing so, we contextualize amortization in a natural way within the educational system. The paper also proposes the use of mathematics to help form more aware citizens. Two activities were developed with SESC High School students: we used the Constant Amortization Mortgage, and we worked with the Price Table. We then briefly comment on the amortization systems used within monetary restatements and the misuse of concepts of financial mathematics in the Housing Finance System. This Course Conclusion Paperwork for the Masters Program in Mathematics from PROFMAT UNIRIO was developed in association with Carolina Bonisson. Most of the content is cited in financial mathematics textbooks used in high schools and the payment worksheets of CAM and the Price Tables were developed with the free software, Geogebra.

Keywords: Amortization, Contextualization, Innovation.

Agradecimentos

A Deus em primeiro lugar. A “Dona Elisa”, minha professora de matemática do ensino fundamental por me fazer amar matemática desde a infância. Aos professores da UNIRIO pela dedicação e apoio nesses dois anos. Ao professor Gladson pela orientação do trabalho. Aos Professores Leonardo e Adriano pelas orientações do uso no software geogebra. A professora Alda Maria de Almeida e Alves, de além-mar, por disponibilizar brilhantes aulas de utilização do software geogebra na internet. Aos meus colegas professores do Colégio Pedro II São Cristóvão e da Escola SESC de Ensino Médio pelo incentivo e, em particular, aos Professores Marcos José e Josete por terem mudado seus horários para que eu pudesse participar de todas as atividades do PROFMAT. Aos amigos dos almoços “na Feira de São Cristóvão” por me fazer acreditar que, mesmo aos 51 anos, é possível sonhar como um adolescente. Aos meus alunos da Escola SESC por participarem com entusiasmo das atividades. Aos meus alunos do Colégio Pedro II pelo incentivo e interesse no meu desenvolvimento durante todo o curso. A minha colega Carolina Bonisson, pela parceria e compromisso no desenvolvimento desse trabalho. Aos colegas de turma, em especial J.J. e Cataldo, pela troca de informações durante nossos horários de estudos, na sala de aula e nos fins de semana. Ao meu enteado Bruno Dias, profissional da área financeira, pelo apoio e orientações sobre os sistemas de amortização com correção monetária. Ao meu amigo de infância, compadre, doutor em engenharia Sérgio Rodrigues, pelo incentivo e por servir de exemplo de perseverança nos momentos mais difíceis. Ao amigo e professor Mário Gaspar (*in memoriam*), que sempre trabalhou o lado social da matemática.

Sumário

1	Apresentação e Motivação	6
2	Conteúdo de matemática financeira em alguns livros didáticos	10
2.1	Considerações	14
3	Atividades propostas	15
3.1	Atividade 1	16
3.1.1	Sistema de Amortização Constante (SAC)	17
3.2	Atividade 2	24
3.2.1	Tabela Price	24
4	Sistemas de Amortização com Correção Monetária	33
5	Considerações Finais	39
	Referências Bibliográficas	40

1 Apresentação e Motivação

No Dicionário eletrônico Houaiss 2, amortizar significa “pagar gradualmente ou abater parte de dívida, empréstimo etc”. A etimologia da palavra amortizar é “a- + morte + -izar”, ou seja, morte é o radical da palavra. Amortizar uma dívida, portanto, significa “fazer morrer” essa dívida aos poucos. Mas o que isso tem a ver com o cotidiano de nossa sala de aula?

O resultado de avaliações como PISA, SAEB e ENEM indica que os alunos da educação básica no Brasil, em sua maioria, têm dificuldades e, em consequência, desinteresse pelo ensino da matemática. O aluno não consegue associar o que ele aprende na escola com o cotidiano. É comum os professores ouvirem as seguintes perguntas de seus alunos: “Por que estou estudando essa matéria?” ou “Como vou aplicar isso na minha vida?”. Os livros didáticos atuais até tentam fazer alguma contextualização, mas, em geral, elas estão totalmente fora da realidade do educando.

Não somos a favor do modismo atual de “só se ensinar o que tem aplicação prática”. Se fosse assim, ao longo da história, muitos conteúdos não seriam estudados e a humanidade não teria atingido o nível de evolução tecnológica atual. Muitos conteúdos matemáticos foram inicialmente estudados sem nenhuma aplicação prática imediata. Alguns conteúdos, inclusive, só tiveram aplicações alguns séculos depois do seu estudo inicial. Acredita-se que a contextualização deva aparecer em sala de aula quando ela realmente existir. E a matemática financeira é o maior exemplo disso. É a parte da matemática que mais tem aplicação no cotidiano. Estuda-se alguma coisa de juros simples e compostos no ensino médio. Mas nem de longe chega-se perto do estudo dos sistemas de amortização. Quando se compra um imóvel, um carro, ou até mesmo um eletrodoméstico de forma parcelada, o cálculo das prestações é feito usando-se um dos dois principais sistemas de amortização: Tabela Price e o Sistema de Amortização Constante (SAC). Analisando-se o estudo desses sistemas, conclui-se que os pré-requisitos básicos são, além de juros simples e compostos, progressão aritmética (PA), progressão geométrica (PG) e logaritmos. Além disso, no ensino médio, pode-se trabalhar somente com uma calculadora científica, de custo bem menor que as calculadoras financeiras.

A falta de conhecimento em matemática financeira faz com que o brasileiro se torne presa fácil do sistema bancário e do comércio mal intencionado. Na ânsia de vender, facilita-se o crédito com taxas de juros abusivas e muitas vezes mentirosas. Até mesmo quem está vendendo de forma parcelada, ou oferecendo o crédito, desconhece os conteúdos matemáticos que geraram esses valores, normalmente tabelados. Usando como ferramentas conteúdos simples do ensino médio como PA, PG e logaritmos, podemos formar um aluno que, no futuro, será um adulto mais crítico na hora de fazer um financiamento. É oportuno lembrar que a LDB indica para o Ensino Médio as funções de :

1. *“Possibilitar o prosseguimento de estudos, mediante “consolidação e aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental”;*
2. *“Preparação Básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar, com flexibilidade, a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamentos posteriores”;*
3. *“Aprimoramento do Educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico”;*
4. *“A compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando teoria e prática no ensino de cada disciplina”.*

O estudo dos Sistemas de Amortização atende às quatro funções propostas pela LDB:

- A primeira é óbvia, uma vez que os sistemas de amortização constituem um aprofundamento do conceito de porcentagem e juros que se aprende no ensino fundamental.

-A segunda também pode estar contemplada principalmente para aqueles alunos que desejam trabalhar na área bancária/financeira.

- A terceira já foi citada, anteriormente. Ao dominar esse conteúdo, o aluno terá autonomia intelectual e pensamento crítico para não se deixar enganar por armadilhas do comércio e do sistema financeiro.

-A quarta função também é contemplada principalmente na relação teoria e prática no ensino da matemática, além do uso dos softwares como Geogebra ,por exemplo, para montagem das planilhas.

Além disso, no Parecer CNE/CP N^o11/2009, que trata da proposta do EN-

SINO MÉDIO INOVADOR, o relator Francisco Aparecido Cordão menciona que o Conselho Nacional de Educação “ênfatiza que o currículo deve ter tratamento metodológico que evidencie a interdisciplinaridade e a contextualização”. Além disso, “o ensino deve ir além da descrição e constituir nos alunos a capacidade de analisar, explicar, prever e intervir, objetivos que são mais facilmente alcançáveis se as disciplinas, integradas em áreas de conhecimento, puderem contribuir, cada uma com sua especificidade, para o estudo comum de problemas concretos, ou para o desenvolvimento de projetos de investigação e/ou de ação”. Portanto, o estudo dos sistemas de amortização, atende às expectativas da proposta para o Ensino Médio Inovador, uma vez que é extremamente concreto aplicar PA e PG, dois tópicos sem muitas dificuldades para o aluno de Ensino Médio, para decidir a melhor forma de financiamento. Se a forma de financiamento já está definida, o conhecimento prévio de “como funcionam” os sistemas de amortização ajuda a verificar se as taxas anunciadas pelo comerciante ou pelo agente financeiro, estão corretas, utilizando somente uma fórmula matemática e uma calculadora científica, sem precisar fazer um curso de como utilizar a calculadora financeira, de custo mais elevado que a científica. Além disso, quando o aluno já tiver todo o domínio das planilhas, fazendo todos os cálculos na calculadora científica, pode-se partir para a montagem dessas planilhas, utilizando o software gratuito Geogebra, dependendo obviamente da capacidade tecnológica da escola.

Ainda tendo como base a proposta do Parecer CNE/CP N^o11/2009, a Professora Maria do Pilar, Secretária de Educação Básica do MEC e membro da Câmara de Educação Básica deste Conselho, citando Martha Gabriel, assim expressou o sentido dessa proposta para o Ensino Médio Inovador.

“INVENTAR é criar, engendrar, descobrir. INOVAR é tornar novo, renovar, introduzir novidade em. A INVENÇÃO tende a ser ruptura, mas a INOVAÇÃO reside no fato de ter compromisso de buscar o foco nas boas idéias existentes, e, especialmente, no fato de que não há mal algum em tomar emprestada uma idéia que já exista. A virtude da INOVAÇÃO está em enquadrar essas idéias às necessidades por meio de: adaptação, substituição, combinação, ampliação ou redução, outras utilizações, eliminação, reversão ou trazer de volta”.

E é nesse conjunto de idéias de inovação que foi proposto o projeto, ampliando o que já foi concebido sobre matemática financeira, explorando conteúdos que consideramos serem pouco trabalhados atualmente no ensino médio. O que se quer mostrar, portanto, é que matemática financeira não se resume a juros simples e compostos.

Serão feitas duas citações de livros de matemática utilizados em larga escala:

- *Matemática: ciência e aplicações*. Autores: Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce , David Degenszajn, Roberto Périco e Nilze de Almeida.
- *Matemática (volume único)*. Autor Manuel Paiva.

Será apresentado o enfoque dado à matemática financeira nesses dois livros, destacando as abordagens sobre cada tópico, apresentando pontos altos e também algumas defasagens. É imprescindível ressaltar que a proposta não é criticar esses livros. O objetivo do trabalho é mostrar como esse tema é abordado no Ensino Médio para que se possa repensar o grau de relevância dado à matemática financeira nas escolas brasileiras. Muitos professores utilizam o livro didático como norteador do seu trabalho. Em vista disso, será questionado se esse é o caminho certo. Acredita-se que seja necessária uma inovação do tema e um replanejamento da grade curricular .

Será apresentada uma abordagem diferente do que é visto atualmente no ensino médio. Espera-se que um aluno, ao final do ensino médio, seja capaz de tomar decisões financeiras de forma crítica e acertada. Saber decidir sobre o que é mais vantajoso numa compra à vista ou a prazo, identificar taxas nominal e efetiva, saber diferenciar um sistema de amortização num financiamento de longo prazo. Tudo isso passa por uma “educação financeira” e para que possamos de fato alcançá-la propomos não só a sua inserção efetiva na grade curricular como na vida desse aluno . Espera-se também, com esse trabalho, contribuir, de alguma forma, com a melhoria do ensino de matemática financeira em nosso país.

Mude, mas comece devagar, porque a direção é mais importante que a velocidade....(Clarice Lispector)

E é a partir dessas perspectivas e questionamentos que damos início ao nosso projeto.

2 Conteúdo de matemática financeira em alguns livros didáticos

Sabe-se que o currículo, muitas vezes, é planejado tomando por base o livro didático adotado. Abaixo elencamos alguns dos principais livros utilizados no Ensino Médio nas escolas brasileiras.

- Matemática: ciência e aplicações, 6ª Edição. Autores: Gelson Iezzi, Oswaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périco e Nilze de Almeida. (17 páginas)
- Matemática: volume único, 1ª Edição. Autor: Manuel Paiva (5 páginas)
- Matemática: ciência, linguagem e tecnologia, 1ª Edição. Autor: Jackson Ribeiro (37 páginas)
- Matemática : Contexto e aplicações, 6ª Edição. Autor: Luiz Roberto Dante (24 páginas)

O que nos chama atenção de forma bastante imediata, é a quantidade de páginas dedicada ao assunto , que como podemos observar na tabela é bem pequena e mesmo no livro com maior quantidade de páginas, os assuntos abordados se resumem a porcentagem , descontos e acréscimos, juros simples e compostos. Poucos são os livros que buscam vincular a matemática financeira a funções, progressões e seus comparativos gráficos.

Acreditamos ser fundamental no estudo desse tema, problemas que se adequem a situações mais próximas à realidade desse aluno, visto que sabemos que a educação não pode mais estar dissociada do contexto social. Felizmente não encontramos somente abordagens negativas. Dentro das limitações do currículo de matemática financeira atual encontramos alguns pontos positivos.

Os dois únicos livros que chegaram a abordar valor presente e valor futuro foram os livros *Matemática: ciência e aplicações* e *Matemática: Contexto e aplicações*, os demais sequer citaram o assunto. Nenhum deles explorou qualquer tipo de sistema de amortização.

Acreditamos que tópicos como série uniforme de pagamentos e sistemas de amortização sejam temas bastante relevantes para uma verdadeira inserção do alunado à realidade e podem perfeitamente ser estudados no Ensino Médio.

Em geral, esses temas são abordados apenas em alguns cursos técnicos como administração e contabilidade, não fazendo parte do currículo do Ensino médio regular.

Salientamos que essa breve análise dos livros, não tem por objetivo criticar, mas repensar o currículo utilizado nas escolas de Ensino Médio, que não dão a merecida importância a um assunto tão rico e de tão grande repercussão social.

Abaixo faremos alguns apontamentos de como a matemática financeira é abordada no livro **"Matemática: volume único"** cujo autor é **Manuel Paiva**, 1ª edição, muito utilizado na rede estadual do Rio de Janeiro. Os livros de volume único são utilizados em larga escala nas escolas públicas, principalmente nos "Programas de Livros Didáticos" distribuídos gratuitamente aos alunos. Esses livros têm a vantagem de ter um custo menor e também na adequação da distribuição dos conteúdos pelas séries. Os livros cujos conteúdos são distribuídos em três volumes, um para cada série, de certa forma "amarram" os conteúdos que serão abordados nas três séries. Os livros de edição única permitem, por exemplo, ensinar PA ao final do estudo de função afim, ou PG ao final de função exponencial, sem a necessidade de produzir material extra uma vez que, em livros de três volumes, esses conteúdos podem estar contemplados em volumes diferentes. A desvantagem é a parte teórica muito limitada e exercícios propostos e resolvidos em número reduzido.

Os conteúdos de matemática financeira foram distribuídos da seguinte maneira

- *CAPÍTULO 5 - Porcentagem*
- *CAPÍTULO 25, UNIDADE 8: Progressões geométricas em cálculo de juros compostos*

No capítulo 5, o autor começa a fazer uma abordagem de porcentagem utilizando para tanto o seguinte exemplo:

Para a fabricação de 300 kg de ovos de Páscoa crocantes foram necessários 15 kg de nozes e o restante de chocolate. Isso significa que em cada 100 kg de ovos há 5 Kg de nozes.

Nesse momento, ele faz um esquema mostrando que 300 Kg de ovos de páscoa podem ser divididos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} 300 \text{ kg de ovos de páscoa} &= \\ &= 100\text{kg} (5\text{kg de nozes} + 95\text{kg de chocolate}) + \\ &+ 100\text{kg}(5\text{kg de nozes} + 95\text{kg de chocolate}) + \\ &+ 100\text{kg}(5\text{kg de nozes} + 95\text{kg de chocolate}). \end{aligned}$$

A partir desse esquema o autor conclui

Podemos dizer, também, que em um cento de quilograma desses ovos há 5 kg de nozes, ou seja a quantidade de nozes que compõem esses ovos é de 5 por cento. Há um símbolo matemático para indicar a expressão por cento: é o símbolo %. Assim a quantidade de nozes desses ovos é 5% (lê-se: cinco por cento).

Ele define então taxa percentual e resolve 9 exercícios, onde os quatro primeiros são exercícios de fixação da definição de taxa.

Um exercício, o de número 7, pedia um cálculo da porcentagem de cobre numa determinada peça metálica. *Para a confecção de uma peça metálica foram fundidos 15 kg de cobre, 9,75kg de zinco e 0,25 kg de estanho. Qual é a porcentagem de cobre dessa peça?*

Nesta questão cabe a seguinte observação: Porcentagem é um assunto rico com inúmeras aplicações no cotidiano. Acreditamos que esse tipo de exemplo não desperte interesse do aluno na faixa etária da maioria dos alunos da 1ª série do ensino médio (por volta dos 14 /15 anos). Talvez o autor desejasse fazer uma suposta aplicação em química.

As questões 8 e 9 são sobre descontos e aumentos nos preços de uma mercadoria. As questões foram bem elaboradas e podem servir de introdução para o estudo de uma Matemática Financeira próxima da realidade. Talvez por ser um livro de edição única e, portanto, com uma parte teórica limitada por questões de espaço, o autor não aproveitou esse momento para explorar os fatores de aumento e desconto, ou seja, fator de aumento 1,12 para um aumento de 12% ($100\% + 12\% = 112\% = 1,12$) e relacionar com o fator $(1 + i)$ que será estudado em juros compostos.

A partir daí, o livro propõe 11 exercícios que ele chama de básico e 12 exercícios complementares, todos de vestibulares e com um grau de complexidade maior que os exercícios resolvidos. A parte teórica e os exercícios resolvidos são insuficientes para que o aluno resolva a maior parte dos exercícios complementares. Essa é uma limitação do livro de volume único, porém pode ser amenizada pelo professor em sala de aula.

A parte de juro composto como aplicação de progressões geométricas apesar de muito resumida é bem interessante. O autor termina o capítulo de progressão geométrica mostrando sua aplicação à matemática financeira. Ele mostra inclusive, de forma bem intuitiva, como chegar à fórmula para o cálculo do montante com juro composto e taxa constante.

O conteúdo de juro composto é apresentado com o seguinte título: *Progressões Geométricas em Cálculos de Juro Composto*.

O autor apresenta o seguinte exemplo contextualizado:

"Apliquei a quantia de R\$500,00 na caderneta de poupança. Ao final de um mês, resgatei R\$525,00.

-A quantia aplicada, isto é, R\$500,00, é chamada de capital inicial da aplicação.

-A diferença entre a quantia que resgatei, isto é : $R\$525,00 - R\$500,00 = R\$25,00$ é chamada de juro produzido pela aplicação.

-A soma do capital inicial com o juro é o montante acumulado pelo período da aplicação.

-O quociente do juro pelo capital inicial, isto é, $\frac{25,00}{500,00} = 0,05 = 5\%$, é chamada de taxa de juro durante o período da aplicação."

Oportunamente o autor acrescentou a seguinte nota:

Na verdade, o rendimento da caderneta de poupança é a soma da correção monetária com o juro;porém, para facilitar a compreensão, chamaremos esse rendimento simplesmente de juro.

Vale ressaltar que não é difícil para os alunos diferenciarem juros de correção monetária. Nesse momento, um exemplo de empréstimo tornaria mais clara a definição de juro. O exemplo da caderneta de poupança poderia vir depois de uma explicação do que é correção monetária.

Logo após o autor mostra, a partir de exemplos, o que é juro composto. O livro sai um pouco do ensino tradicional que costuma apresentar juros simples antes de juros compostos. O livro só faz um breve comentário sobre juros simples. Nota-se claramente a desvantagem do livro de volume único. Muitas vezes a teoria é resumida para que se consiga colocar todo conteúdo do ensino médio em um único livro. Apesar de juros simples ter poucas aplicações práticas é interessante, conceitualmente, o aluno comparar esses dois regimes de juros.

São apresentados então cinco exercícios resolvidos e em seguida o autor propõe que o aluno resolva 10 questões que ele chama de básicas e mais 29 exercícios complementares, todos de vestibulares. Cabe a mesma observação da parte de porcentagem. Como o livro é de volume único, a parte teórica e os exercícios resolvidos são insuficientes para que o aluno resolva sozinho as questões complementares. Nesse momento, o papel do professor é fundamental.

2.1 Considerações

O livro foge do tradicional de matemática financeira que normalmente trabalha com a sequência porcentagem, juros simples e juros compostos. Esse último, não associado à aplicação de progressões geométricas. O autor foi muito feliz ao trabalhar juros compostos logo após o estudo de progressões geométricas. Acreditamos não haver necessidade de trabalhar com fórmulas para o cálculo do montante com taxa constante, com taxa variável e descontos. Caso no início do estudo de porcentagem for trabalhado o fator de aumento $(1+i)$ e fator de desconto $(1-i)$ - mesmo não utilizando essas expressões literais - o aluno será capaz de resolver todos esses problemas. Podemos justificar que fator de aumento de 12%, por exemplo, é igual a 1,12 mostrando simplesmente o seguinte: $100\% + 12\% = 112\% = \frac{112}{100} = 1,12$. E o fator de desconto de 12%, por exemplo, de forma análoga: $100\% - 12\% = 88\% = 0,88$. Se o aluno internalizar esses fatores, resolverá certamente todos os problemas de montante com taxa constante, com taxa variável ou com taxas negativas da mesma maneira.

3 Atividades propostas

O objetivo das atividades descritas abaixo é mostrar que o conteúdo de **Sistemas de Amortização**, normalmente trabalhado nos cursos de Matemática Financeira de nível superior, utilizando uma calculadora financeira, pode ser trabalhado no ensino médio, como aplicação dos conceitos de PA e PG, utilizando apenas uma calculadora científica. No ensino superior, o estudo de **Sistemas de Amortização** é feito, de uma maneira geral, nos cursos de Administração e Economia, utilizando planilhas como Excel e calculadoras como a HP financeira sem se preocupar com os conceitos matemáticos que justificam os procedimentos. É quase um treinamento de como utilizar as tecnologias para se chegar aos resultados. O professor deve ter em mente que o objetivo desse trabalho, no ensino médio, é mostrar uma aplicação da matemática no cotidiano, sem perder de vista o rigor de se justificar matematicamente cada passo. Sendo assim, podemos trabalhar o formalismo e a contextualização num mesmo conteúdo. É importante também fazer uma breve revisão dos conceitos de PA e PG, caso essa matéria tenha sido ministrada num ano anterior. Além de PA e PG são pré-requisitos básicos, porcentagem, juros simples e compostos, além de logaritmos.

Serão apresentadas duas atividades que foram realizadas com os alunos da Escola SESC de Ensino Médio -ESEM . A ESEM é uma escola-residência, gratuita, inaugurada em fevereiro de 2008. De acordo com o site (www.escolasesc.com.br), o projeto da escola “acompanha a diretriz institucional do SESC - entidade mantenedora da Escola através do seu Departamento Nacional - que, desde a sua fundação, em 1946, privilegia a ação educativa atendendo comerciários e trabalhadores do setor terciário e seus dependentes, e membros da sociedade em geral”. Os alunos são selecionados por Processo Seletivo Nacional e as vagas são distribuídas por estado. Não há cotas, porém, as vagas são prioritárias para dependentes de comerciários. A escola é de turno integral. No horário de 7h30min às 15h30min os alunos têm aulas do núcleo comum. O horário das 16h35min até 20h10min, os alunos têm aulas de recuperação ou oficinas da parte diversificada. As recuperações são obrigatórias. As oficinas da parte diversificada (músicas, artes, atividades esportivas, aprofundamentos de matérias do núcleo comum como, por exemplo, matemática aplicada à física, cálculo, questões de vestibulares,etc.) são escolhi-

das de acordo com a preferência dos alunos. Além disso, existem grupos do “compromisso acadêmico” formado por alunos com dificuldades acadêmicas. Esses alunos são indicados pelo setor de Orientação Pedagógica e têm um acompanhamento especial durante todo o ano letivo.

3.1 Atividade 1

A primeira atividade foi realizada com dois grupos de alunos da Escola SESC de Ensino Médio -ESEM.

Ao final dessa atividade, o aluno deverá ser capaz de construir planilhas de pagamentos do Sistema de Amortização Constante, bem como resolver questões de concursos públicos sobre esse assunto.

Para essa atividade 1, com duração de aproximadamente 1 hora e 20 minutos, os dois grupos foram selecionados da seguinte maneira: o primeiro, formado por 10 alunos da 3ª série do “compromisso acadêmico”. O segundo, por 11 alunos voluntários. A maior parte desse segundo grupo era formada por alunos com bom rendimento acadêmico em matemática. O tema abordado para essa primeira atividade foi o SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE(SAC). Antes porém, algumas definições importantes foram dadas aos alunos:

Mutuante: Aquele que empresta.

Mutuário: Aquele que recebe o empréstimo.

Capital ou Principal (C): É o valor emprestado.

Parcelas de Amortização(A): Corresponde as parcelas de devolução do principal, ou seja, do capital emprestado.

Juro (J): É o custo do capital, tomado sob o aspecto do mutuário, ou o retorno do capital investido, sob o aspecto do mutuante. Colocando de uma maneira bem coloquial, “O JURO É O PREÇO DO DINHEIRO”. (Foi explicado, nesse momento, para os alunos que, da mesma maneira que supermercado vende alimentos, bebidas, etc. o banco vende dinheiro).

Saldo Devedor (S_k): É o valor devido em um certo período “k”.

Prestação(P_k ou R_k): É o pagamento da amortização mais o juro relativo ao saldo devedor imediatamente anterior ao período referente a prestação. Neste ponto é importante observar que a prestação referente a um período “ k ” pode ser representada como $P_k = A_k + J_k$.

A seguir, foram apresentadas as principais definições relativas especificamente ao Sistema de Amortização Constante(SAC). A opção de apresentar inicialmente tais definições , mesmo sabendo que eles não teriam condições de entender todas elas, buscou despertar a curiosidade e fazer com que, no decorrer da montagem da planilha, os alunos fossem concluindo ou verificando a validade de tais conceitos.

3.1.1 Sistema de Amortização Constante (SAC)

Neste sistema de amortização as parcelas são iguais entre si, ou seja, $A = \frac{C}{n}$, em que n é o número de períodos.

Os juros são calculados a cada período, multiplicando-se a taxa de juros contratada (na forma unitária) pelo saldo devedor existente no período anterior.

Por definição, como a amortização é constante e o juro incide sobre o saldo devedor, as prestações tem valores decrescentes a cada período, sob forma de progressão aritmética.

Saldo devedor também decrescente, sob forma de progressão aritmética.

Última cota de amortização igual ao saldo devedor após o pagamento da penúltima prestação.

No texto que foi distribuído aos alunos há o seguinte alerta: ”FIQUE CALMO! As definições acima ficarão bem claras com o exemplo a seguir.”

Os conceitos do SAC são trabalhados por meio do seguinte exemplo:

Exemplo: *Considere um empréstimo de R\$10.000,00 que deve ser devolvido pelo SAC em 5 prestações mensais, sendo a primeira em 30 dias, à taxa de juros compostos de 10% ao mês. Construa a planilha de pagamentos desse empréstimos.*

Solução comentada : Do enunciado do problema tem-se que

$$C = 10.000, \quad n = 5, \quad i = 0,1,$$

em que C é o capital, n é o número de prestações e i é a taxa de juros unitária.

Logo a amortização constante é calculada da seguinte maneira:

$$A = \frac{C}{n} = \frac{10.000}{5} = 2.000.$$

A partir daí, com base nas definições anteriores, é construída a seguinte planilha:

k	A_k	J_k	$P_k = A_k + J_k$	S_k
0				10.000
1	2000	10% de 10000 = 1000	2000 + 1000 = 3000	10000 - 2000 = 8000
2	2000	10% de 8000 = 800	2000 + 800 = 2800	8000 - 2000 = 6000
3	2000	10% de 6000 = 600	2000 + 600 = 2600	6000 - 2000 = 4000
4	2000	10% de 4000 = 400	2000 + 400 = 2400	4000 - 2000 = 2000
5	2000	10% de 2000 = 200	2000 + 200 = 2200	2000 - 2000 = 0

Neste ponto, em conjunto com os alunos, conclui-se que:

- As prestações 3000, 2800, 2600, 2400, 2200 e os juros 1000, 800, 600, 400, 200 formam uma PA de razão -200 . Note que essa razão é igual a

$$-(A \cdot i) = -(2000 \cdot 0,1) = -200.$$

- Os saldos devedores 10000, 8000, 6000, 4000, 2000 e 0 forma uma P.A de razão $-A = -2000$.

A partir daí, foi generalizado junto com os alunos;

$$P_1 = A + J_1 = A + C \cdot i$$

$$P_2 = A + J_2 = A + (C - A) \cdot i = (A + C \cdot i) - A \cdot i$$

$$P_3 = A + J_3 = A + (C - 2A) \cdot i = (A + C \cdot i) - 2A \cdot i$$

Sendo assim, as prestações P_k formam um PA em que o primeiro termo é $a_1 = (A + C \cdot i)$ e a razão é $r = -(A \cdot i)$.

Para a resolução dos exercícios propostos é importante que sejam lembradas as fórmulas do termo geral e da soma dos termos de uma PA.

É importante ressaltar que tanto os alunos de compromisso acadêmico quanto os alunos voluntários, esses últimos com bom desempenho em matemática, não tiveram dificuldades em entender o mecanismo de funcionamento do S.A.C. Todos, sem exceção, acharam interessante relacionar uma matéria que eles já haviam aprendido em sala de aula com uma aplicação realmente prática. Alguns alunos, dos dois grupos, disseram que essa matéria seria mais relevante que, números complexos, polinômios e Geometria Analítica, conteúdos da 3ª série do ensino médio, que só terão importância futura para os alunos das áreas tecnológicas. Os **Sistemas de Amortização**, ao contrário, terão importância para qualquer pessoa que um dia venha comprar algum bem financiado.

A partir daí, foi proposto o seguinte exercício.

Exercício: *Considere um empréstimo de R\$8.000,00 que deve ser devolvido pelo SAC em 10 prestações mensais, sendo a primeira em 30 dias, à taxa de juros compostos de 5% ao mês. Construa a planilha de pagamentos desse empréstimo.*

Solução comentada: Do enunciado extraímos que

$$C = 8000, n = 10 \text{ e } i = 0,05.$$

em que C é o capital, n é o número de prestações e i é a taxa de juros unitária.

Logo a amortização constante é calculada da seguinte maneira:

$$A = \frac{C}{n} = \frac{8000}{10} = 800.$$

Com estas informações contruímos a planilha abaixo

k	A_k	J_k	$R_k = A_k + J_k$	S_k
0				8000
1	800	400	1200	7200
2	800	360	1160	6400
3	800	320	1120	5600
4	800	280	1080	4800
5	800	240	1040	4000
6	800	200	1000	3200
7	800	160	960	2400
8	800	120	920	1600
9	800	80	880	800
10	800	40	840	0

Todos os 21 alunos dos dois grupos conseguiram resolver integralmente esse exercício. Apenas 6 alunos, todos do "compromisso acadêmico", fizeram como o exemplo anterior, ou seja, calculando o juro sobre o saldo devedor no período e, logo após, a prestação e o novo saldo devedor. Cabe lembrar que, no exemplo, só foi concluído que era PA no final da construção da planilha. Todos os outros 15 alunos só calcularam o juro, a prestação e o saldo devedor para os dois primeiros períodos. Como eles haviam concluído, no exemplo anterior, que esses valores formavam uma PA decrescente, eles completaram as colunas dos juros, prestação e saldo devedor utilizando a razão de suas respectivas PAs. Somente três alunos, todos do "compromisso acadêmico" solicitaram ajuda do professor, ou de algum colega, para construir a planilha. Cabe ressaltar que o aluno da ESCOLA SESC está acostumado a trabalhar em grupos e, mesmo no grupo daqueles com alguma dificuldade acadêmica, os que terminam a tarefa primeiro, naturalmente, começaram a ajudar quem ainda está com dificuldades. A tabela abaixo resume o desempenho dos alunos.

	Comp. Acad.	Volu.
Calcularam juro, prestação saldo devedor em todos os períodos	6	nenhum
Calcularam juro, prestação saldo devedor nos 2 primeiros períodos	4	11
Solicitaram ajuda ao professor ou colega	3	nenhum

Ao término desse primeiro exercício, foi proposto a resolução de um outro exercício retirado da prova do Concurso da Caixa Econômica Federal, cuja banca era composta por professores da fundação CESPE/UnB, de Brasília. Um aluno relatou, nesse momento, que gostaria de prestar concurso para escriturário do Banco do Brasil. Ressaltei que matemática financeira como um todo, e **Sistemas de Amortização**, SAC e Tabela Price são muito cobrados nos concursos do Banco do Brasil e da Caixa Econômica Federal. Como essas instituições bancárias têm agências espalhadas por todo o Brasil, esse tipo de concurso interessa ao aluno da Escola SESC uma vez que eles são oriundos de todo o país. O aluno que externou a vontade de fazer o concurso do Banco do Brasil é morador da cidade de Rio Branco, no Acre.

Exercício: *Um empréstimo de R\$250.000,00 deve ser devolvido pelo SAC em 50 prestações mensais, sendo a primeira um mês após a contratação do empréstimo, à taxa de juros compostos de 2% ao mês. A partir dessas informações julgue os itens a seguir;*

(1) *O valor das duas primeiras prestações são, respectivamente, R\$10.000,00 e R\$9.900,00.*

(2) *A soma das 20 primeiras prestações é menor que R\$181.000,00.*

(3) *O valor da 37ª prestação é igual a R\$6.400,00.*

Observação: É importante neste ponto alertar aos alunos que, nesse tipo de concurso, cada item marcado errado anula um item certo. Itens não assinalados não anulam os itens marcados corretamente. Nesse caso, a melhor opção para quem não sabe responder corretamente um item é deixá-lo em branco.

Solução: Do enunciado extraímos que:

Item (1)

$$C = 250.000,00, n = 50, A = \frac{C}{n} = \frac{250.000}{50} = 5.000 \text{ e } i = 0,02.$$

Dessa forma a primeira prestação será dada por

$$P_1 = A + J_1 \Rightarrow P_1 = 5000 + 0,02 \times 250.000 \Rightarrow P_1 = 10.000,00.$$

O saldo devedor no período 1 é

$$250.000 - 5.000 = 245.000,00$$

e a segunda prestação portanto será

$$P_2 = 5.000 + 0,02 \times 245.000 \Rightarrow P_2 = 5.000 + 4.900 = 9.900,00$$

Logo, o item (1) está correto.

Item (2)

As prestações formam uma PA cujo primeiro termo é $P_1 = 10.000$ e a razão é $r = -100$. Portanto a soma das 20 primeiras prestações é

$$S_{20} = \frac{(P_1 + P_{20}) \cdot 20}{2}$$

Como a vigésima prestação é $P_{20} = 10.000 + 19 \times (-100) = 8.100$ então

$$S_{20} = \frac{(10.000 + 8.100) \cdot 20}{2} = 181.000,00.$$

Logo, o item (2) está incorreto.

Item (3)

A trigésima sétima prestação é $P_{37} = P_1 + 36r$, ou seja,

$$P_{37} = 10.000 + 36 \times (-100) = 6.400,00.$$

Logo, o item (3) está correto.

Desempenho dos alunos:

- Todos os alunos calcularam a amortização: $A = \frac{C}{n} = \frac{250000}{50} = 5000$.
- Para calcular a primeira e a segunda prestação, todo o grupo do "compromisso acadêmico" e 9 alunos do grupo dos voluntários, montaram uma mini planilha para os dois primeiros meses
- Dois alunos do grupo dos voluntários, calcularam a primeira prestação: $P_1 = A_1 + J_1 = 5000 + 5000 = 10000$, e a razão pela fórmula $r = -(A.i) = -(5000.0,02) = -100$. Logo após, calcularam a segunda prestação como segundo termo da P.A, $P_2 = 10000 - 100 = 9900$.
- Os itens 2 e 3 foram respondidos basicamente da mesma maneira por todos os alunos.

	Compromisso Acadêmico	Voluntários
Utilizou PA das prestações	9	9
Utilizou PA dos juros	nenhum	2
Não chegou a resposta correta	1	nenhum

Foi então proposto mais um exercício do concurso da Caixa Econômica Federal.

Exercício: *Um empréstimo de R\$40.000,00 deve ser descontado pelo SAC com 40 prestações mensais (1ª prestação 30 dias após), a taxa de juros compostos de 2% ao mês. Em relação ao 21º mês, julgue os itens:*

- (1) *A amortização é de \$1.000,00.*
- (2) *A prestação é superior a \$1.400,00.*
- (3) *O juro é inferior a \$500,00.*
- (4) *O saldo devedor é inferior a \$20.000,00.*

Solução: Do enunciado extraímos que

$$C = 40.000,00, n = 40 \text{ e } i = 0,02.$$

Item (1)

$$A = \frac{C}{n} = \frac{40.000}{40} = 1.000.$$

Logo, o item (1) está correto.

Item (2)

A prestação P_{21} é dada por $P_{21} = P_1 + 20r$ onde

$$P_1 = (A + C \cdot i) = 1.000 + 40.000 \times 0,02 = 1.800$$

e a razão é $r = -(1000 \times 0,02) = -20$. Portanto P_{21} é dada por

$$P_{21} = 1.800 + 20 \times (-20) = 1.400,00.$$

Logo, o item (2) está incorreto.

Item (3)

O juro no vigésimo primeiro mês é $J_{21} = P_{21} - A$, isto é,

$$J_{21} = 1.400 - 1.000 = 400,00.$$

Logo, o item (3) está correto.

Item (4)

O saldo devedor no vigésimo primeiro mês é

$$40.000 - 21 \times 1.000 = 19.000$$

Logo, o item (4) está correto.

Desempenho dos alunos:

O quadro abaixo resume o desempenho dos alunos neste exercício.

	Compromisso Acadêmico	Voluntários
Conseguiram resolver	2	11
Deixaram em branco por questão de tempo	8	nenhum

Conclusão: De uma maneira geral, os alunos gostaram e entenderam a atividade. Todos concordaram que os sistemas de amortização deveriam fazer parte do estudo regular de matemática financeira no Ensino Médio. Os que não conseguiram fazer alguma questão foram os alunos com um ritmo mais lento que os demais, mas, tenho certeza, que se o tempo fosse flexibilizado, todos chegariam, de forma mais ou menos trabalhosa, a solução das questões.

3.2 Atividade 2

3.2.1 Tabela Price

Na segunda atividade realizada na escola SESC, com duração de 3 horas, os temas abordados foram *série uniforme de pagamentos* e *tabela Price*. Foram utilizados para a realização dessa atividade data-show, tela de projeção e calculadoras científicas.

A atividade tem início abordando situações cotidianas como por exemplo os juros abusivos cobrados pelas operadoras de cartão de crédito. Juros esses que já bateram

a taxa de 15% *a.m.* A exposição inicial faz com que os alunos reflitam sobre a questão dos juros sobre juros, onde esses 15% *a.m* geram uma taxa nominal de 180% *a.a.*. Citando Augusto Cesar Morgado, essa taxa nominal (falsa), na realidade, gera uma taxa efetiva de 435% *a.a.* , pois se fizermos uma simples aplicação de taxas equivalente temos :

$$(1 + i) = (1 + 0,15)^{12}, \text{ ou seja,}$$

$$i = 4,35 = 435\% \text{ a.a.}$$

Alguns alunos mostraram espanto com esse valor, pois já consideravam a taxa de 180% *a.a* absurda. Infelizmente muitos brasileiros chegam a acreditar nessa taxa de 180% *a.a* e pouquíssimos têm consciência de que na realidade tem que pagar juros de 435% *a.a.*, acumulando dívidas cada vez maiores, gerando o famoso efeito "bola de neve", ou como foi citado na atividade, "*o cliente vira Sócio atleta do SPC e Serasa*".

É importante ressaltar que essa atividade possui uma série de pré-requisitos pois nessa etapa o aluno, além de possuir os conceitos iniciais de matemática financeira tais como juros simples e compostos, deve saber o valor do dinheiro no tempo (diagrama de setas). Progressões aritméticas e geométricas também são assuntos que devem estar bem assimilados pelos alunos. Lembramos que essa aula foi ministrada para alunos do 3º ano do Ensino Médio em fase de conclusão de curso

O primeiro exemplo trabalhado tem caráter introdutório e o seu objetivo é fazer o aluno relembrar o valor do dinheiro deslocado no tempo. Esse exemplo foi resolvido utilizando o diagrama de setas ou eixo de setas.

Exemplo 1: *Uma loja vende um produto em 4 prestações mensais e consecutivas de \$80,00, sendo a primeira um mês após a compra. Se a taxa de juros compostos do mercado é de 2% ao mês, qual deve ser o preço à vista equivalente ao pagamento a prazo?*

Solução comentada:

Deve-se deslocar o valor de cada prestação para a data zero pois o pagamento é a vista.

Assim tem-se:

$$V = \frac{80}{1,02} + \frac{80}{(1,02)^2} + \frac{80}{(1,02)^3} + \frac{80}{(1,02)^4} = 304,62.$$

Apesar desses cálculos serem extremamente trabalhosos é apontado para o

aluno que ao colocar “80” em evidência, o segundo fator é uma P.G, cujo primeiro termo é $\frac{1}{1,02}$ e a razão também é $\frac{1}{1,02}$.

Nota-se portanto que

$$V = 80 \cdot \left(\frac{1}{1,02} + \frac{1}{(1,02)^2} + \frac{1}{(1,02)^3} + \frac{1}{(1,02)^4} \right).$$

Ao se aplicar a soma da P.G finita obtemos :

$$S = \frac{\frac{1}{1,02} \left[1 - \left(\frac{1}{1,02} \right)^4 \right]}{1 - \frac{1}{1,02}} = 3,807729$$

donde segue-se que

$$V = 80 \cdot 3,807729 = 304,62.$$

Generalizando, considere que uma dívida a ser paga com n prestações iguais a P , segundo a taxa na unidade de tempo considerada. Defina V como seu valor atual. Logo:

$$V = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \dots + \frac{P}{(1+i)^n}$$

$\therefore$

$$V = P \cdot \frac{\frac{1}{1+i} \left[1 - \left(\frac{1}{1+i} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{1+i}} = P \cdot \frac{\frac{1}{1+i} [1 - (1+i)^{-n}]}{\frac{1+i-1}{1+i}} = P \cdot \frac{\frac{1}{1+i} [1 - (1+i)^{-n}]}{\frac{i}{1+i}}$$

$$V = P \cdot \frac{[1 - (1+i)^{-n}]}{i}.$$

Foi introduzido o termo $a_{n,i} = a_{n-i}$ também conhecido como **fator de valor atual** em que n é a quantidade de prestações e i é a taxa de juros aplicada.

Nesse momento o professor expôs a tabela de fator de valor atual e mostrou como utilizá-la .

Assim V (valor à vista) pode ser calculado da seguinte forma:

$$V = P \cdot a_{n-i}$$

Isto é, o valor à vista é o valor da prestação multiplicado por esse fator a_{n-i} .

Vale ressaltar que isso não resulta uma fórmula diferente já que a_{n-i} nada mais é do que o valor da soma dos termos de uma PG finita, porém algumas bancas como a Cesp/Unb e Fundação Carlos Chagas, costumam usar esses termos em seus concursos, assim é importante mostrar para o aluno as diferentes formas de aplicação. Vale ressaltar que o projeto foi todo desenvolvido utilizando calculadoras científicas e não as tradicionais financeiras $HP - 12C$.

Apesar de acreditarmos que o mais importante é saber o processo que leva a determinadas fórmulas e tabelas, sabemos que as mesmas se bem utilizadas poupam tempo, e muitas vezes serão o único auxílio em provas de concursos.

Nesta atividade um questionamento bastante interessante feito por um dos alunos foi o fato de que a tabela fator de valor atual começa com percentual de 1%, por que não valores menores?

Uma das explicações é o fato de a inflação no período em que foi implantada ser bastante alta, além do que dificilmente em empréstimos os juros serão inferiores a 1%. Ao fazermos uma pesquisa realmente encontramos pouquíssimas dessas tabelas utilizando taxas de 0,5% ; 0,6% por exemplo.

O segundo exemplo trabalhado foi o seguinte.

Exemplo 2: *Uma compra no valor de \$10.000,00 deve ser paga com uma entrada de 20% e o saldo devedor financiado em 12 prestações mensais e iguais, vencendo a primeira ao fim de um mês, a uma taxa de 4% ao mês. Considerando que esse sistema de amortização corresponde a uma anuidade ou renda certa, em que o valor atual de anuidade corresponde as prestações, calcule a prestação mensal, desprezando os centavos.*

Solução comentada:

O valor da entrada é 20% de 10.000,00, ou seja, 2.000,00. Essa entrada claramente não entra no nosso financiamento.

Dessa forma o valor financiado é $V = 8.000,00$. Do enunciado do problema sabemos que $n = 12$ e $i = 4\%$. Considerando P o valor da prestação obtêm-se

$$8.000 = P \cdot a_{n-i}.$$

Aqui cabe destacar que, dependendo da banca, pode ser fornecido uma tabela de fator de valor atual ou, até mesmo, uma tabela de coeficiente de financiamento

$$\left(\frac{1}{a_{n,i}} = \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} \right).$$

O aluno pode portanto, utilizar a tabela se a mesma for fornecida ou ainda, calculadora científica. Em casos de concurso, onde o uso de calculadoras não é permitido, o aluno pode deixar os valores indicados.

Da tabela abaixo tiramos que $a_{12,4} = 9,385074$ e sendo assim temos que

$$P = \frac{8000}{a_{12,4}} = 852,42.$$

FATOR DE VALOR ATUAL DE UMA SÉRIE DE PAGAMENTOS $\rightarrow A_{n,i} = \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right]$

n \ i	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	15%	18%	20%
1	0,990099	0,980392	0,970874	0,961538	0,952381	0,943396	0,934579	0,925926	0,917431	0,909091	0,900901	0,892857	0,869565	0,847458	0,833333
2	1,970395	1,941561	1,913470	1,886095	1,859410	1,833393	1,808018	1,783265	1,759111	1,735537	1,712523	1,690051	1,625709	1,565642	1,527778
3	2,940985	2,883883	2,828611	2,775091	2,723248	2,673012	2,624316	2,577097	2,531295	2,486852	2,443715	2,401831	2,283225	2,174273	2,106481
4	3,901966	3,807729	3,717098	3,629895	3,545951	3,465106	3,387211	3,312127	3,239720	3,169865	3,102446	3,037349	2,854978	2,690062	2,588735
5	4,853431	4,713460	4,579707	4,451822	4,329477	4,212364	4,100197	3,992710	3,889651	3,790787	3,695897	3,604776	3,352155	3,127171	2,990612
6	5,795476	5,601431	5,417191	5,242137	5,075692	4,917324	4,766540	4,622880	4,485919	4,355261	4,230538	4,111407	3,784483	3,497603	3,325510
7	6,728195	6,471991	6,230283	6,002055	5,786373	5,582381	5,389289	5,206370	5,032953	4,868419	4,712196	4,563757	4,160420	3,811528	3,604592
8	7,651678	7,325481	7,019692	6,732745	6,463213	6,209794	5,971299	5,746639	5,534819	5,334926	5,146123	4,967640	4,487322	4,077566	3,837160
9	8,566018	8,162237	7,786109	7,435332	7,107822	6,801692	6,515232	6,246888	5,995247	5,759024	5,537048	5,328250	4,771584	4,303022	4,030967
10	9,471305	8,982585	8,530203	8,110896	7,721735	7,360087	7,023582	6,710081	6,417658	6,144567	5,889232	5,650223	5,018769	4,494086	4,192472
11	10,367628	9,786848	9,252624	8,760477	8,306414	7,886875	7,498674	7,138964	6,805191	6,495061	6,206515	5,937699	5,233712	4,656005	4,327060
12	11,255077	10,575341	9,954004	9,385074	8,863252	8,383844	7,942686	7,536078	7,160725	6,813692	6,492356	6,194374	5,420619	4,793225	4,439217
13	12,133740	11,348374	10,634955	9,985648	9,393573	8,852683	8,357651	7,903776	7,486904	7,103356	6,749870	6,423548	5,583147	4,909513	4,532681
14	13,003703	12,106249	11,296073	10,563123	9,898641	9,294984	8,745468	8,244237	7,786150	7,366687	6,981865	6,628168	5,724476	5,008062	4,610567
15	13,865053	12,849264	11,937935	11,118387	10,379658	9,712249	9,107914	8,559479	8,060688	7,606080	7,190870	6,810864	5,847370	5,091578	4,675473
16	14,717874	13,577709	12,561102	11,652296	10,837770	10,105895	9,446649	8,851369	8,312558	7,823709	7,379162	6,973986	5,954235	5,162354	4,729561
17	15,562251	14,291872	13,166118	12,165669	11,274066	10,477260	9,763223	9,121638	8,543631	8,021553	7,548794	7,119630	6,047161	5,222334	4,774634
18	16,398269	14,992031	13,753513	12,659297	11,689587	10,827603	10,059087	9,371887	8,755625	8,201412	7,701617	7,249670	6,127966	5,273164	4,812195
19	17,226008	15,678462	14,323799	13,133939	12,085321	11,158116	10,335595	9,603599	8,950115	8,364920	7,839294	7,365777	6,198231	5,316241	4,843496
20	18,045553	16,351433	14,877475	13,590326	12,462210	11,469921	10,594014	9,818147	9,128546	8,513564	7,963328	7,469444	6,259331	5,352746	4,869580
21	18,856983	17,011209	15,415024	14,029160	12,821153	11,764077	10,835527	10,016803	9,292244	8,648694	8,075070	7,562003	6,312462	5,383683	4,891316
22	19,660379	17,658048	15,936917	14,451115	13,163003	12,041582	11,061240	10,200744	9,442425	8,771540	8,175739	7,644646	6,358663	5,409901	4,909430
23	20,455821	18,292204	16,443608	14,856842	13,488574	12,303379	11,272187	10,371059	9,580207	8,883218	8,266432	7,718434	6,398837	5,432120	4,924525
24	21,243387	18,913926	16,935542	15,246963	13,798642	12,550358	11,469334	10,528758	9,706612	8,984744	8,348137	7,784316	6,433771	5,450949	4,937104

Desconsiderando os centavos temos prestações de \$852,00.

O terceiro e último exemplo apresentado foi o seguinte:

Exemplo 3: Uma nutricionista depositou \$1.500,00 semestralmente para formar um pecúlio durante 10 anos. Calcule o montante à taxa de juros compostos 30% ao semestre.

Solução comentada:

Como $i = 30\%$ ao semestre, $n = 10$ anos temos 20 semestres.

Como o capital inicial é o valor atual do dinheiro temos

$$V = P.a_{20,3}.$$

Assim

$$V = 1500. \left(\frac{1 - (1,3)^{-20}}{0,3} \right)$$

$$V = 4973,69$$

Deseja -se encontrar o montante a uma taxa de juros compostos de 30% ao semestre por um período de 20 semestres temos:

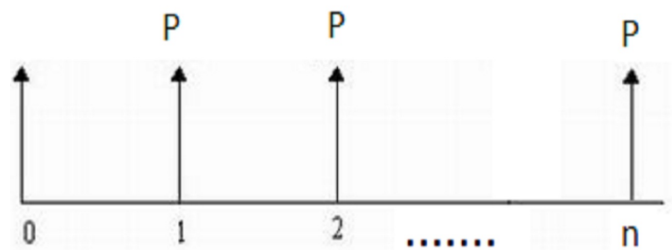
$$M = 4973,69.(1,3)^{20}$$

$$M = 945.248,19$$

Esse exemplo foi explorado da seguinte forma:

Foi utilizada uma generalização onde P é a prestação, n é a quantidade destas prestações e i é a taxa unitária.

Assim trazendo todas as prestações para a data atual temos:



$$V = P \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \quad (3.1)$$

$$M = V \cdot (1 + i)^n \quad (3.2)$$

Substituindo (3.1) em (3.2) temos

$$M = P \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{i}, \text{ isto é,}$$

$$M = P \cdot S_{n,i},$$

em que $S_{n,i}$ é chamado **fator de acumulação de capital** ou **valor futuro**.

Esse problema serviu para fazer um "link" com uma situação bastante comum para jovens investidores que aplicam parte dos seus rendimentos no mercado financeiro. Note que nesse exemplo hipotético, ao investir um valor de \$ 1500 mensais ao final de 10 anos o rendimento chegou próximo a 1 milhão de reais .Poder-se-ia questionar que esses juros estão um pouco altos. Vale lembrar que esse é um exemplo hipotético e que os juros de mercado são bastante variáveis .

Nesse exemplo foi explorado também o uso que se faz da calculadora científica. Os alunos, em geral, sabem usar tecnologias muito avançadas. Essa nova geração é composta por "nativos digitais". Seus celulares conectam a internet, usam ipods, ipads entre outros com uma facilidade incrível. Porém, ao fazer uso da calculadora científica, muitas vezes não sabem explorar suas funcionalidades.

Após resolver esses exemplos em conjunto com os alunos, foi proposto que eles tentassem fazer o exercício abaixo, utilizando a generalização que tinha sido deduzida sobre montante. O objetivo desse exercício, utilizando agora taxas de juros mais próximas da realidade, é mostrar que poupando uma pequena quantia mensalmente, consegue-se formar um pecúlio significativo no final de 10 anos.

Exercício: *Um PROFESSOR depositou \$500,00 mensalmente para formar um pecúlio durante 10 anos. Calcule o montante à taxa de juros compostos 6% ao ano, capitalizado mensalmente?*

Solução comentada:

Do enunciado sabemos que $n = 10$ anos, isto é, 120 meses e $i = 6\%$ ao ano que capitalizados mensalmente nos dá $0,5\%$ ao mês. Como

$$M = P \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{i},$$

então

$$M = 500 \cdot \frac{(1,005)^{120} - 1}{0,005} = 81.939,67 \text{ ao final de 10 anos.}$$

Lembre-se que na atividade 1 foi utilizada a tabela SAC. Nesta segunda atividade faremos uso da tabela Price.

Neste ponto, a fim de motivar o assunto, devem ser introduzidas algumas utilizações da tabela Price, como por exemplo o financiamento de imóveis e principalmente o financiamento de automóveis.

Destaca-se abaixo uma série de características da Tabela Price, tais como:

- Prestações fixas
- Amortizações crescentes (prestações fixas juros decrescentes)
- A taxa de juros contratada é dada em termos nominais.
- As prestações tem período menor que aquele a que se refere a taxa. (No cálculo é utilizada a taxa proporcional ao período a que se refere a prestação).

- Última cota de amortização igual ao saldo devedor após o pagamento da penúltima prestação.
- Saldo devedor imediatamente após o pagamento da prestação P_k é igual ao valor atual da série postecipada formada pelas prestações $P_k + 1$ até P_n .
- Como as prestações $P_k = R$ constantes constituem uma série uniforme de pagamentos, o capital emprestado é o valor atual dessa série.
- Cada prestação R é dada por $R = C \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$.

Após listar tais características talvez valha a pena ressaltar que os alunos não devem se desesperar com tanta informação e que após pôr o Sistema Price em prática, muitas dúvidas serão elucidadas. Inicia-se então com o seguinte exemplo.

Exemplo: Considere um empréstimo de \$10.000,00 que deve ser devolvido pelo Sistema Francês (Tabela Price) em 5 prestações mensais, sendo a primeira em 30 dias, à taxa de juros compostos de 10% ao mês. Construa a planilha de pagamentos desse empréstimo.

k (Período)	P_k (Prestação)	J_k (Juros)
0	—	—
1	2.637,97	10% de 10.000,00 = 1.000,00
2	2.637,97	10% de 8.362,03 = 836,20
3	2.637,97	10% de 6.560,26 = 656,03
4	2.637,97	10% de 4.578,32 = 457,83
5	2.637,97	10% de 2.398,18 = 239,82

k (Período)	$A_k = P_k - J_k$ (Amortização)
0	—
1	2.637,97 - 1.000,00 = 1.637,97
2	2.637,97 - 836,20 = 1.801,76
3	2.637,97 - 656,03 = 1.981,94
4	2.637,97 - 457,83 = 2.180,14
5	2.637,97 - 239,82 = 2.398,15

k (Período)	S_k (Saldo devedor)
0	10.000,00
1	$10.000,00 - 1.637,97 = 8.362,03$
2	$8.362,03 - 1.801,76 = 6.560,26$
3	$6.560,26 - 1.981,94 = 4.578,32$
4	$4.578,32 - 2.180,14 = 2.398,18$
5	$2.398,18 - 2.398,15 \cong 0$

É importante lembrar que o valor da prestação fixa é calculado através das fórmulas

$$V = P \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$P = C \cdot \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

$$P = 10000 \cdot \frac{0,1}{1 - (1 + 0,1)^{-5}}$$

$$P = 2.637,97,$$

pois trata-se de uma série uniforme de pagamentos com prestações fixas postecipadas.

Vale a pena destacar que se o mutuário quiser quitar a dívida na data 3, por exemplo, deve-se "trazer" as prestações P_4 e P_5 para essa data.

Assim teríamos

$$\frac{2.637,97}{1,1} + \frac{2.637,97}{(1,1)^2} = 4578,29$$

Note que esse valor é aproximadamente o mesmo que o saldo devedor na data 3.

Ressaltamos a importância de explorar a tabela de várias formas e não como um processo meramente mecânico.

Após construir a tabela o professor retornou as características da Tabela Price e os alunos demonstraram, nesse momento, ter compreendido com mais clareza.

Em seguida pode ser sugerido aos alunos que estes resolvam um problema onde tenham que montar uma tabela Price.

4 Sistemas de Amortização com Correção Monetária

Trabalhamos até aqui com sistemas de amortização de um mundo perfeito, sem inflação e, em consequência, sem atualização do valor do empréstimo ou seja, sem utilizar a correção monetária. Segundo o Wikipédia (<http://pt.wikipedia.org>):

Correção Monetária é um ajuste feito periodicamente de certos valores na economia tendo como base o valor da inflação de um período, objetivando compensar a perda de valor da moeda.

Nos sistemas de amortização utilizados na compra da casa própria, por exemplo, os valores do empréstimo podem ser atualizados mensalmente ou dentro de um determinado período. O professor deve mencionar sistemas de amortização, com correção monetária em sala de aula, apenas sob caráter informativo, sem cobrança desse procedimento em avaliações, uma vez que os cálculos são muito trabalhosos e fogem do objetivo maior desse trabalho que é a aplicação no cotidiano dos conteúdos matemáticos que são ministrados no Ensino Médio (PA/PG e Logaritmos). Também é interessante mostrar que a falta de domínio dos conteúdos matemáticos faz uma grande parcela da população acreditar que leis demagógicas possam ser benéficas para o mutuário. Vamos mostrar dois exemplos: o Decreto-Lei n^o 2164, de 19 de setembro de 1984 (ainda na ditadura militar) e a Lei 8692, de 28 de julho de 1993. Duas tentativas de "assassinato" da matemática financeira.

Para exemplificar um sistema de amortização com correção monetária, vamos resolver o exercício utilizado na atividade 2 .

Considere um empréstimo de R\$10.000,00 que deve ser devolvido pelo Sistema Francês (Tabela Price) em 5 prestações mensais, sendo a primeira em 30 dias, à taxa de juros compostos de 10% ao mês. Construa a planilha de pagamentos desse empréstimo.

Vamos utilizar os índices de atualização monetária de 0,38%; 0,23%; 0,27%; 0,12% e 0,13% para os cinco meses, respectivamente. Esses índices serão utilizados para

corrigir o saldo devedor e a prestação. Em consequência disso, teremos que acrescentar três colunas na planilha: o índice de correção monetária, o saldo devedor corrigido e a prestação corrigida. As atualizações serão feitas mensalmente.

Solução:

O cálculo da prestação é o mesmo:

$$P = C \cdot \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} \therefore$$

$$P = 10000 \cdot \frac{0,1}{1 - (1 + 0,1)^{-5}} = 2.637,97.$$

Construindo a planilha, temos:

k	Índice de correção	Sk corrigido	Jk
0	-	-	-
1	0,38%	$10000 \times 1,0038 = 10038$	10% de 10038 = 1003,80
2	0,23%	$8393,81 \times 1,0023 = 8413,12$	10% de 8413,12 = 841,31
3	0,27%	$6600,35 \times 1,0027 = 6618,17$	10% de 6618,17 = 661,82
4	0,12%	$4618,74 \times 1,0012 = 4624,28$	10% de 4624,28 = 462,43
5	0,13%	$2422,27 \times 1,0013 = 2425,41$	10% de 2425,41 = 242,54

Pk corrigida	Ak=PK corrigida- Jk	Sk=Sk corrigido-Pk corrigida
-	-	10000
$2637,97 \times 1,0038 = 2647,99$	1644,19	8393,81
$2647,99 \times 1,0023 = 2654,08$	1812,77	6600,35
$2654,08 \times 1,0027 = 2661,25$	1999,43	4618,74
$2661,25 \times 1,0012 = 2664,44$	2202,01	2422,27
$2664,44 \times 1,0013 = 2667,90$	2425,36	0,05

Nota-se que não houve um valor residual grande no saldo devedor, uma vez que foram aplicados os mesmos índices de correção no saldo devedor e nas prestações. O valor residual de R\$0,05 deve-se aos arredondamentos. Porém, contrariando os conceitos da matemática financeira, o DECRETO-LEI N^o 2.164, DE 19 DE SETEMBRO DE 1984, instituiu, dentre outras coisas, a "equivalência salarial como critério de reajustamento das prestações". Esse decreto determinava que o reajuste da prestação deveria ser realizado pelo mesmo índice que reajustou o salário da categoria profissional do mutuário. Era o chamado Plano de Equivalência salarial, por Categoria profissional (PES/CP).

Posteriormente, A LEI Nº 8.692, DE 28 DE JULHO DE 1993, criou o Plano de Equivalência Salarial por Comprometimento de Renda (PES/PCR). Nessa nova lei, o valor da prestação mensal não pode ultrapassar a 30% da renda do mutuário, como mostram os artigos seguintes.

Art. 2º Os contratos de financiamento habitacional celebrados em conformidade com o Plano de Comprometimento da Renda estabelecerão percentual de no máximo trinta por cento da renda bruta do mutuário destinado ao pagamento dos encargos mensais.

Parágrafo único. Define-se como encargo mensal, para efeitos desta lei, o total pago, mensalmente, pelo beneficiário de financiamento habitacional e compreendendo a parcela de amortização e juros, destinada ao resgate do financiamento concedido, acrescida de seguros estipulados em contrato.

Art. 4º O reajustamento dos encargos mensais nos contratos regidos pelo Plano de Comprometimento da Renda terá por base o mesmo índice e a mesma periodicidade de atualização do saldo devedor dos contratos, mas a aplicação deste índice não poderá resultar em comprometimento de renda em percentual superior ao máximo estabelecido no contrato.

1º Sempre que o valor do novo encargo resultar em comprometimento da renda do mutuário em percentual superior ao estabelecido em contrato, a instituição financeira, a pedido do mutuário, procederá à revisão do seu valor, para adequar a relação encargo mensal/renda ao referido percentual máximo.

2º As diferenças apuradas nas revisões dos encargos mensais serão atualizadas com base nos índices contratualmente definidos para reajuste do saldo devedor e compensados nos encargos mensais subseqüentes.

O problema é exatamente o parágrafo segundo do art.4º. Se o índice que reajustar o saldo devedor fizer a prestação ter um comprometimento de renda maior que 30% as diferenças serão ”atualizadas com base nos índices contratualmente definidos para reajuste do saldo devedor e compensados nos encargos mensais subseqüentes.”

Na prática, isso significa dizer, de forma bem resumida, que foi dado um índice para atualizar o saldo devedor e um outro menor para atualizar a prestação. É claro que a dívida torna-se impagável. Em alguns contratos, essa diferença era coberta pelo

Fundo de Compensação de Variações Salariais (FCVS). Nesse fundo, criado por lei federal, o mutuário pagava todos os meses, junto com as suas prestações, 3% do valor da mesma para que, ao final do financiamento, tivesse seu imóvel quitado independente do valor do saldo residual. Porém, em muitos contratos, o saldo residual não era coberto pelo FCVS e, no final do financiamento, o mutuário tinha que refinanciar sua dívida. Foi nesse momento que surgiu o termo esdrúxulo *amortização negativa*. Segundo Daniel G. P. Cunha, economista e perito judicial, no seu artigo *A tabela Price e sua lenda* (<http://www.ocaixa.com.br/rodape/rodape20071126.htm>) cita o que seria uma amortização negativa:

Se o montante dos juros superar o montante das prestações – fixas na Tabela Price – o valor da amortização será negativo. O que é uma amortização negativa? É um montante de juros que não foi totalmente pago pelo montante da prestação proposta, assim, ao invés de diminuir o saldo devedor, irá aumentá-lo. A presença de amortizações negativas representa – na verdade – uma parcela do montante de juros apurados que está sendo lançada no saldo devedor do financiamento. Neste momento temos o lançamento de juros sobre o saldo devedor.

O site <http://www.forumsfh.com.br>, cita como esse termo é absurdo do ponto de vista matemático:

II – Das “amortizações negativas”

Nos demonstrativos elaborados pelos agentes financeiros (conhecidos como “planilha de evolução de financiamento”), relativos aos contratos regidos pelo Plano de Equivalência Salarial (PES), é comum, sempre que os valores dos juros sejam superiores aos valores das prestações, surgirem na coluna das amortizações (diferença entre o valor da prestação e dos juros), valores negativos que, por óbvio, aumentam o saldo devedor, ao invés de reduzi-lo.

A esse “fenômeno”, denominou-se “amortização negativa”.

O próprio termo é uma incoerência, uma vez que amortizar significa liquidar, extinguir, no caso, uma dívida, portanto, não se pode liquidar a dívida aumentando-a, ou seja, às avessas. Além do que, não existe “dinheiro negativo”.”

Nos contratos sem cobertura do FCVS, o saldo residual era de responsabilidade do mutuário e seria refinanciado pela metade do prazo do financiamento inicial. Se, ao final desse refinanciamento, houvesse saldo residual, ele teria que ser quitado de uma única vez pelo mutuário. Isso gerou uma interminável luta judicial. Um mínimo de conhecimento dos Sistemas de Amortização, evitaria que o mutuário assinasse um contrato em que, ao fim do financiamento, a dívida não estivesse totalmente amortizada. É fácil verificar, no exemplo da atividade 1, que se aplicarmos um índice de correção na prestação e um outro maior no saldo devedor, o empréstimo jamais seria amortizado. Mais uma vez é mostrado que a matemática pode se tornar um aliado poderoso do cidadão, desde que, no ensino regular, seja também direcionada para exemplos contextualizados de verdade.

Por fim, vamos refazer a questão da atividade 1, utilizando um índice de correção monetária, acumulado após 3 meses, com recálculo das amortizações. Dessa forma, vamos mostrar como se constrói uma tabela SAC com correção monetária. De uma maneira geral, em empréstimos de longa duração, o saldo devedor é atualizado anualmente com recálculo das amortizações.

Considere um empréstimo de R\$10.000,00 que deve ser devolvido pelo SAC em 5 prestações mensais, sendo a primeira em 30 dias, à taxa de juros compostos de 10% ao mês. Construa a planilha de pagamentos desse empréstimos, sabendo que os índices de correção monetária para os três primeiros meses são, respectivamente, 0,38%; 0,23% e 0,27%.

Solução: O cálculo inicial é o mesmo, como $C = 10.000$; $n = 5$ e $i = 0,1$ então a amortização A é dada por

$$A = \frac{C}{n} = \frac{10.000}{5} = 2000.$$

Planilha para os três primeiros meses:

k	Índice de correção	Índice de correção acumulado	Ak
0	-	-	-
1	0,38%	-	2000
2	0,23%	-	2000
3	0,27%	$(1,0038 \times 1,0023 \times 1,0027 - 1) \times 100\% = 0,88\%$	2000

Jk	Pk=Ak+Jk	Sk	Sk corrigido
-	-	10000	-
10% de 10000 = 1000	3000	10000 – 2000 = 8000	-
10% de 8000 = 800	2800	8000 – 2000 = 6000	-
10% de 6000 = 600	2600	6000 – 2000 = 4000	$1,0088 \times 4000 = 4035,20$

O novo saldo devedor é R\$4035,20. Temos então que recalcular a nova amortização para os dois meses restantes, isto é, $A = \frac{4035,20}{2} = 2017,60$.

Logo, a planilha para os próximos dois meses é:

k	Índice de correção	Índice de correção acumulado	Ak
3	-	-	-
4	-	-	2017,60
5	-	-	2017,60

Jk	Pk=Ak+Jk	Sk	Sk corrigido
-	-		4035,20
10% de 4035,20 = 403,52	2421,12	$4035,20 - 2017,60 = 2017,60$	-
10% de 2017,60 = 201,76	2219,36	$2017,60 - 2017,60 = 0$	-

5 Considerações Finais

Mostramos, com as atividades realizadas, que é possível trabalharmos os conteúdos e Sistemas de Amortização, PRICE e SAC, no Ensino Médio. Os pré-requisitos necessários são juros simples, juros compostos e progressões. Dominando os conteúdos de progressões geométricas o aluno é capaz de entender como funciona uma série uniforme de pagamentos e, a partir daí, calcular o valor da prestação de um financiamento na Tabela Price. E com os conteúdos de progressões aritméticas o aluno consegue montar, com facilidade, uma planilha de pagamentos no SAC. A inclusão do estudo de sistemas de amortização, no ensino médio, contribuirá para a formação de um cidadão mais consciente e atuante, capaz de tomar decisões financeiras de forma crítica e acertada. Dessa forma fica evidenciado o papel social da matemática na formação do educando.

Referências Bibliográficas

- [1] Dante, Luiz Roberto. Matemática :contexto e aplicações,São Paulo ,Ática, 2010.
- [2] Iezzi,Gelson; Dolce, Oswaldo; Degenszajn, David; Périgo, Roberto; Almeida, Nilze de. Matemática: ciência e aplicações,volume 1, 6ª edição, editora Saraiva,2010.
- [3] Iezzi, Gelson; Hazzan, Samuel; Degenezajn, D. Mauro. Fundamentos da Matemática Elementar, 11: matemática comercial e financeira. - 1ªed.- São Paulo, Atual 2004.
- [4] Mathias, Washinton Franco; Gomes, José Maria. Matemática financeira, 6ª edição, 4ª reimpressão, São Paulo,Atlas 2011.
- [5] Morgado, Augusto C.; Wagner, Eduardo; Zani, Sheila C. Progressões e Matemática Financeira, SBM, Rio de Janeiro, 1993.
- [6] Paiva, Manoel. Coleção base: matemática volume único/Manoel Paiva -1ª edição,São Paulo,Moderna 1999.
- [7] Ribeiro, Jackson. Matemática:ciência , linguagem e tecnologia,volume 2,1ª edição,São Paulo , Scipione ,2010.