Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Pós-graduação em Matemática

Gisele Valle de Farias

A Matemática Financeira na Educação Básica e sua importância para a formação de um cidadão consciente

Rio de Janeiro
2013

Gisele Valle de Farias

A Matemática Financeira na Educação Básica e sua importância para a formação de um cidadão consciente

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Ronaldo da Silva Busse

Doutor em Matemática - UFRJ

Rio de Janeiro

2013

de Farias, Gisele

A Matemática Financeira na Educação Básica e sua importância para a formação de um cidadão consciente / Gisele de Farias - 2013

30.p

1.Matemática 2. Matemática Financeira. I.Título.

CDU 536.21

Gisele Valle de Farias

A Matemática Financeira na Educação Básica e sua importância para a formação de um cidadão consciente

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 05 de abril de 2013

BANCA EXAMINADORA

Ronaldo da Silva Busse

Doutor em Matemática - UFRJ

Gladson Octaviano Antunes

Doutor em Matemática - UFRJ

Orlando dos Santos Pereira

Doutor em Matemática - UFRJ

À minha filha pela minha ausência, ao meu marido pela paciência em momentos difíceis e aos meus pais e minha sogra pelo apoio durante todo esse trajeto.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus que sempre me abençoou com saúde para chegar até aqui.

A minha filha Letícia agradeço a paciência pela ausência durante alguns períodos para que eu pudesse concluir esse trajeto. Comecei esse projeto quando ela tinha apenas 10 meses e muitas vezes tive que deixá-la para estudar.

Aos meus pais Elvira e Emiliano dedico toda a minha formação, pois eles sempre me apoiaram em todos os projetos que resolvi traçar em minha vida. Juntamente com eles agradeço à minha sogra Ieda que me ajudaram na difícil tarefa de me ausentar em alguns momentos da minha filha, conseguiram acalmar meu coração sabendo que ela estava cercada de carinho e amor.

Ao meu marido Abilio agradeço o incentivo e o apoio durante todo o curso de Mestrado, sempre acreditou em mim e me apoiou.

Agradeço aos meus amigos de turma que sempre me ajudaram, mas em especial agradeço às amigas Carolina e Priscila que sempre me ajudaram.

Aos meus professores agradeço a transmissão dos conhecimentos que foram adquiridos durante todo o curso, em particular agradeço ao Dr. Ronaldo Busse que mostrou que além de um excelente professor é uma grande pessoa sempre preocupado com os seus alunos.

"Os nossos pais amam-nos porque somos seus filhos, é um fato inalterável. Nos momentos de sucesso, isso pode parecer irrelevante, mas nas ocasiões de fracasso, oferecem um consolo e uma segurança que não se encontram em qualquer outro lugar."

Bertrand Russell (A Fortaleza)

Resumo

A Matemática Financeira é um ramo da matemática de fundamental importância para o uso cotidiano do cidadão. Neste trabalho, ressaltamos, sob a ótica da Lei de Diretrizes e Bases e dos Parâmetros Curriculares Nacionais, a importância do seu ensino na educação básica, destacando que, muitas das vezes, o conteúdo é negligenciado ou ensinado de forma superficial, apenas com aplicações de fórmulas simples. Discutimos a necessidade da Matemática Financeira para a formação do professor de Matemática e observamos que em muitos cursos de Licenciatura em Matemática essa não é uma disciplina obrigatória do seu currículo.

Propomos uma aula baseada em problemas do dia-dia do aluno, fatos reais, vivenciados por seus parentes e amigos como, por exemplo, o financiamento de um carro ou a compra de uma casa pelo Sistema de amortização, multa de condomínio e outros casos, tornando assim a aula mais enriquecedora.

Por fim, é importante destacar que esse trabalho foi desenvolvido em conjunto com a discente Priscila Belota de Almeida.

Palavras-chaves: Educação Financeira, cidadão, cotidiano

Abstract

The Financial Mathematics is a branch of mathematics of fundamental importance to the everyday citizen. In this work, we emphasize the perspective of the Law of Guidelines and Bases of the National Curriculum, the importance of teaching in basic education, pointing out that, often, content is neglected or taught in a superficial way, only applications with simple formulas. We discussed the necessity of Financial Mathematics for teacher training in Mathematics and observed that in many courses in Mathematics this is not a mandatory subject of your resume.

We proposed a class based in problems of day-day student, actual events, experienced by their relatives and friends, for example, financing a car or buying a home by System amortization, condo and fine other cases, thus making class richer.

Finally, it is important to note that this study was conducted in conjunction with the student Priscila Belota de Almeida.

Keywords: Financial Education, citizen, daily

Sumário

1 Introdução

Uma das aplicações mais claras da Matemática ocorre no meio das finanças. No nosso cotidiano sempre nos deparamos com os termos: empréstimos, juros, parcelamento, inflação, etc. Entretanto, poucas pessoas realmente têm noção das consequências de cada um desses termos.

É de fundamental importância que tenhamos na sociedade cidadãos críticos e conscientes de todos os seus atos e uma boa administração financeira reflete em sua família e, consequentemente, na sociedade como um todo.

A população está sempre adquirindo novos bens e é necessário que esse consumo seja feito de maneira consciente, para que o indivíduo não seja enganado por fraudes ou propagandas que ludibriam e enganam o consumidor. Muitos compram a sua casa própria, ou o seu carro, parcelados, sem terem a noção do quanto de juros há embutido. Isso ocorre devido a grande parte da população, inclusive os graduados, não terem conhecimento sobre um ramo importantíssimo da Matemática, a Matemática Financeira.

A educação financeira é fundamental para a formação de um cidadão crítico e consciente de suas decisões. Entretanto, esse conteúdo é, muitas das vezes, negligenciado pelas escolas e, em particular, pelos professores. Quando lecionada no Ensino Médio, a disciplina é abordada com grau de relevância baixíssimo, com exemplos e exercícios que "fogem" do nosso cotidiano. Acreditamos que isso se dê, em parte, pela formação deficiente do licenciado nesse campo da Matemática. Analisamos os currículos de Licenciatura das principais universidades públicas do Rio de Janeiro e percebemos uma desvalorização da Matemática Financeira, visto que essa disciplina não se constitui em obrigatória em nenhuma delas, ficando a critério do aluno escolhê-la como optativa.

A Matemática financeira deveria ser exposta no ensino fundamental, não somente através de Juros Simples, que, sabemos, é utópico nos dias de hoje, e sim da maneira como realmente encontramos na sociedade, com problemas envolvendo juros sobre juros. A escola poderia trabalhar esse assunto de maneira interdisciplinar, passando por Português, História, Ciências e outras mais.

O objetivo central deste trabalho é ressaltar a importância da Matemática Financeira para a Educação Básica. No segundo capítulo, apresentamos a Matemática Financeira sob a ótica da Lei de Diretrizes e Bases e dos Parâmetros Curriculares Nacionais. Analisamos, ainda, a abordagem desse assunto por alguns livros didáticos e fazemos um levantamento acerca da Matemática Financeira nos cursos de licenciatura em Matemática das principais universidades públicas do Rio de Janeiro. No terceiro capítulo, apresentamos uma proposta de aula, baseada na utilização de problemas reais e na apresentação dos conteúdos de forma contextualizada e interdisciplinar.

2 A Matemática Financeira no Ensino Médio

Neste capítulo, apresentamos uma discussão sobre a importância da Matemática Financeira à luz da Lei de Diretrizes e Bases e dos Parâmetros Curriculares Nacionais. Fazemos, ainda, uma avaliação sucinta da apresentação do conteúdo por alguns livros didáticos.

2.1 A Educação Financeira sob a ótica da Lei de Diretrizes e Bases

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) define e regulariza o sistema de educação brasileiro com base nos princípios presentes na Constituição. A primeira LDB foi criada em 1961, seguida por uma versão em 1971. Com a promulgação da Constituição de 1988, tornou-se necessária a discussão acerca de uma nova LDB, que foi sancionada pelo então presidente Fernando Henrique Cardoso, em 20 de dezembro de 1996 (Lei n^o 9.394/96).

De acordo com o Art. 1^o da LDB, "*a educação deverá vincular-se ao mundo do trabalho e à prática social*". Deste modo, entendemos que a matemática financeira torna-se assunto de extrema relevância no currículo escolar, uma vez que o aluno, como cidadão, necessitará lidar com seus ganhos referentes ao seu trabalho e, estando inserido num contexto social, a maneira como este cidadão administra seus ganhos pode causar impactos na sua vida e na de sua família, além de impactar também a comunidade em que esteja inserido.

Uma prática financeira consciente e planejada pode mudar a realidade de uma comunidade inteira.

> *A educação, dever da família e do Estado, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho.*

Lei n^o 9394/96, Art. 2°

Uma educação financeira bem fundamentada vem de encontro com os princípios de liberdade citados na LDB, pois um cidadão endividado é privado de exercer sua cidadania sob diversos aspectos, como, por exemplo, ter uma conta bancária com cartão de crédito (elementos que hoje em dia podem significar segurança pois é uma alternativa a andar com dinheiro), ou frequentar cinemas, teatros, casas de show (itens que normalmente as classes mais baixas não tem acesso visto que, por não estarem relacionados como necessidade básica, ficam fora das prioridades). Além disso, um cidadão que sabe lidar de forma saudável com seu dinheiro inegavelmente será um profissional que saberá lidar com responsabilidade com o dinheiro envolvido em seu ambiente de trabalho, seja público ou privado.

Ainda para firmar a importância da educação financeira nas escolas, o Art. 3^o da LDB define entre os princípios do ensino a "*valorização da experiência extraescolar*", onde o aluno pode (e deve) vincular a prática na sala de aula com sua realidade, aprendendo estratégias de ação e internalização de valores que servirão para melhora de sua vida como cidadão.

Defendemos que a educação financeira deve ser parte integrante e obrigatória entre os conteúdos curriculares da educação básica, uma vez que tais conteúdos têm como uma de suas diretrizes "*a difusão de valores fundamentais ao interesse social, aos direitos e deveres dos cidadãos, de respeito ao bem comum e à ordem democrática*" (Lei n^o 9394/96, Art. 27°).

Entendemos que oferecer uma educação financeira de qualidade é um ato de democracia, pois dará ao cidadão (como consumidor) condições de analisar, debater, barganhar com os lojistas, bancários, ou qualquer outro que entre em transação financeira com ele de igual para igual, evitando os corriqueiros prejuízos aos consumidores em sua maioria.

Ainda segundo a LDB, os ensinos fundamental e médio têm como metas: "*o desenvolvimento da capacidade de aprendizagem, tendo em vista a aquisição de conhecimentos e habilidades e a formação de atitudes e valores*" (Art.32^o), "*a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando*" (Art. 35^o).

É desejável que o estudante saia da escola com uma educação financeira básica e consistente, internalizada a ponto de ser natural e que o permita estar inserido na sociedade com seu poder aquisitivo de modo positivo, gerando riqueza para ele, sua família e a comunidade em que vive. Deste modo, a escola estará promovendo "*o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico*", como direciona o Art. 35^o da LDB.

2.1.1 A Matemática Financeira no currículo dos cursos de licenciatura em matemática do Rio de Janeiro

Tão importante quanto ressaltar a importância de se incluir a educação financeira na escola é preparar os professores para desempenhar o papel de educador financeiro. Entretanto, o professor é fruto de um sistema de ensino que não valorizava este campo da matemática e, portanto sua formação é, na maior parte dos casos, insatisfatória. Deste modo, o professor deve se apoiar em sua formação acadêmica superior ou nos livros didáticos, sobre os quais falaremos a frente.

Debruçando-nos sobre os currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática das principais universidades públicas do Rio de Janeiro (UFRJ, UFF, UNIRIO, UFRRJ e UERJ), podemos perceber que a Matemática Financeira não costa como cadeira obrigatória. Essa disciplina geralmente é oferecida como optativa, isto é, os licenciandos, que ainda não possuem uma vivência na escola, têm liberdade para cursá-la ou não. Os que optam por não cursar, normalmente, chegam às salas de aula com a formação financeira recebida na educação básica, tornando-se esse problema um ciclo vicioso. Somos da opinião, portanto, de que o professor de matemática em formação deve ter uma educação financeira consistente e seria importante que a Matemática Financeira se tornasse disciplina fixa e obrigatória no currículo dos cursos de licenciatura em matemática.

As Universidades, segundo a LDB, possuem autonomia para "*fixar os currículos dos seus cursos e programas, observadas as diretrizes gerais pertinentes*" (Lei n^o 9394/96, Art. 53°). Além disso, cabe aos colegiados de ensino e pesquisa a decisão de incluir a matemática financeira no currículo dos cursos de licenciatura em matemática.

> "Para garantir a autonomia didático-cientifica das universidades, caberá aos seus colegiados de ensino e pesquisa decidir, dentro dos recursos orçamentários disponíveis, sobre a elaboração da programação dos cursos."

Lei n^o 9394/96, Art. 53°

Ainda de acordo com a LDB, "*os docentes ocuparão setenta por cento dos assentos em cada órgão colegiado e comissão, inclusive nos que tratarem da elaboração de modificações estatutárias e regimentais*" (Lei n^o 9394/96, Art. 56°).

Dessa forma, concluímos que a decisão de tal inclusão se dá efetivamente pelos docentes da Universidade. Estes docentes, por sua vez, não possuem obrigatoriamente em suas vidas profissionais a docência na educação básica, incorrendo numa discrepância entre as necessidades do professor da educação básica que está em formação e o que lhe é oferecido nos bancos da universidade.

Defendemos, portanto, que a educação financeira deve ser inserida no currículo básico das licenciaturas em matemática de modo a atender o primeiro dos fundamentos da formação dos profissionais da educação: o de proporcionar ao licenciando *"a presença de sólida formação básica, que propicie o conhecimento dos fundamentos científicos e sociais de suas competências de trabalho"* (Lei n^o 9394/96, Art. 61°).

2.2 Parâmetros Curriculares Nacionais e Educação Financeira

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) são sugeridos, para que todas as escolas possam seguir, com propostas de contextualização e interdisciplinaridade levando em consideração o aluno inserido em uma sociedade. São divididos em 10 volumes, mas nos ateremos aos volumes 1 (Introdução ao PCN) e 3 (Matemática), e à primeira seção do volume 10 (temas transversais).

Os PCNs se caracterizam por uma série de fatores, mas um em particular nos chama atenção, a saber:

> "...mostrar a importância da participação da comunidade na escola, de forma que o conhecimento aprendido gere maior compreensão, integração e inserção no mundo; a prática escolar comprometida com a interdependência escola-sociedade tem como objetivo situar as pessoas como participantes da sociedade - cidadãos - desde o primeiro dia de sua escolaridade".

Formar um cidadão consciente é importante para toda a sociedade e uma pessoa completamente formada possui a responsabilidade de administrar a sua vida financeira e, muita das vezes, a de toda família.

Um ramo da Matemática de fácil contextualização é a Matemática Financeira, afinal qualquer exemplo que tomemos dela é de adaptação imediata para a realidade do aluno. A interdisciplinaridade na Matemática Financeira também ocorre de maneira natural dentro da própria Matemática ou mesmo com outras áreas do conhecimento, como a História e as Ciências Sociais.

No volume 3 dos PCNs que trata da Matemática, temos:

> "O trabalho com a Álgebra também está presente em atividades e problemas envolvendo noções e conceitos referentes aos demais blocos, como ao generalizar os procedimentos para calcular o número de diagonais para qualquer polígono, ao indicar a expressão que relaciona duas grandezas, ao calcular medidas da tendência central de uma pesquisa. É importante que os alunos percebam essas conexões. A proporcionalidade, por exemplo, que já vem sendo trabalhada nos ciclos anteriores, aparece na resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções. Para a compreensão da proporcionalidade é preciso também explorar situações em que as relações não sejam proporcionais os contraexemplos".

É importante que o aluno aprenda a interpretar tabela, entenda que a proporcionalidade não é sempre a solução de todos os problemas, consiga relacionar as funções e seus gráficos com a sua vida financeira, conseguindo migrar o conhecimento que está no papel para a sua vida e consequentemente levando para a sociedade.

Um dos requisitos dos temas transversais do PCN é favorecer a compreensão da realidade e a participação social, para que o aluno desenvolva a capacidade de se tornar consciente e saber se posicionar nas questões referentes à vida coletiva, intervindo no meio em que vive de forma crítica e responsável. A apresentação da Matemática Financeira sob essa ótica contribui significativamente para a formação preconizada pelos PCNs.

2.3 Análise de alguns Livros Didáticos para o Ensino Médio

Os livros didáticos constituem o principal instrumento de apoio para os professores e alunos em sala de aula sendo, muitas vezes, o único. Por isso, torna-se relevante observar como os livros didáticos tratam a Matemática Financeira. Vale lembrar que, por não ser disciplina obrigatória em grande parte dos cursos de Licenciatura em Matemática, tais livros tendem a direcionar a prática do professor. Dessa forma, destacamos a importância de se ter livros com bom conteúdo e bastante ferramentas, inclusive tecnológicas, para um aprendizado coeso.

Analisamos os seguintes livros:

- Matemática no Ensino Médio – Autor: Márcio Cintra Goulart
- Matemática (Volume Único) – Autor: Luiz Roberto Dante
- Matemática (Volume Único) – Autor: Manoel Paiva
- Matemática - Ensino Médio – Autoras: Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz
- Matemática Novo Ensino Médio – Autores: Marcondes, Gentil e Sérgio

Inicalmente, cabe ressaltar que, em todas as obras analisadas, o assunto não ultrapassa 10 páginas, ou seja, todo o conteúdo de Matemática Financeira é tratado no máximo nessas páginas, incluindo os exercícios que os alunos deverão desenvolver sozinhos.

Em todos os livros a Matemática Financeira é subdividida em: Porcentagem (conteúdo que o aluno do ensino médio já deveria ter um bom conhecimento), Juros Simples e Juros Compostos. Dos materiais avaliados, apenas o livro Matemática, do autor Manoel Paiva, apresenta uma conexão dos juros compostos com as progressões geométricas. Todos os demais apresentam o conteúdo somente através de fórmulas.

O livro Matemática, do autor Luiz Roberto Dante, relembra números proporcionais e divisão de uma quantia em partes proporcionais e, em seguida, menciona o fator de atualização, que seria a razão entre o valor novo e o valor velho (termos utilizados pelo livro), relacionando-o aos termos aumento e desconto. O livro trata do assunto aumentos e descontos sucessivos, não tratados em nenhum outro livro analisado, utilizando fatos do cotidiano como, por exemplo, a inflação. No mesmo livro temos uma excelente comparação entre Juros e Funções, sendo o único a fazê-lo assim tão diretamente. O autor constrói dois gráficos de Juros Simples e um gráfico de Juros compostos, fazendo assim a ligação dos assuntos com a Função Afim e a Exponencial.

Os livros analisados apresentam exercícios simples do cotidiano, não buscando uma realidade mais elaborada no uso de Matemática Financeira como, por exemplo, sistemas de amortização e descontos simples. Não é necessário ser acrescentado nenhum conteúdo a mais no Ensino Médio para que questões mais elaboradas sejam trabalhadas em sala de aula, apenas sendo necessário reunir uma gama maior de conhecimentos adquiridos durante todo o processo de ensino.

Uma alternativa de complementação aos livros didáticos são os recursos tecnológicos de áudio e vídeo, como os encontrados no Portal do Professor na plataforma do MEC (http://portaldoprofessor.mec.gov.br). Nesta plataforma podemos encontrar sugestões para enriquecer os planos de aula, áudios e vídeos que podem ser exibidos em sala de aula e diversas curiosidades de matemática. Com estes recursos é possível motivar os alunos através de uma aula mais dinâmica e contextualizada. Lá encontramos também materiais referentes à Matemática Financeira, explorada de maneira lúdica e contextualizada, além de apoio para os professores. É possível, por exemplo, exibir para os alunos um vídeo em que um casal precisa decidir entre comprar móveis e eletrodomésticos à vista ou à prazo, analisando prós e contras. A conclusão da decisão abre precedente para discussões em sala de aula, onde os alunos podem confrontar suas realidades e suas ações.

3 Uma proposta de aula baseada em exemplos concretos

Este capítulo traz uma proposta de aula de Matemática Financeira que pretende apresentar ao aluno situações-problema cotidianas e contextualizadas, que ele deve encontrar no dia a dia, e estimular o desenvolvimento de habilidades para solução desses problemas.

3.1 Preliminares

Indicamos, na nossa proposta, a abordagem de conteúdos que não são vistos comumente na Educação Básica e que não exigem conceitos matemáticos diferentes daqueles já vistos pelo aluno. De fato, o pré-requisito básico para o acompanhamento da aula é o conhecimento de Progressão Geométrica, como se segue:

Progressões Geométricas

São sequências de números com a característica de que cada número da sequência, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por um valor fixo (chamado razão). Se uma PG tem n termos e razão q, e denotamos o primeiro de a_1, então :

$$PG : \{a_1, a_1q, a_1q^2, \dots\ , a_1q^{n-1}\}$$

Nesse caso, o termo geral da PG é dado por

$$a_n = a_1q^{n-1}$$

e a soma dos seus n primeiros termos é:

$$S_n = a_1\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Quando $|q| < 1$, podemos calcular a soma dos termos de uma PG infinita e obtemos

$$S = \frac{a_1}{1 - q}.$$

A seguir são apresentados os conteúdos de Matemática Financeira a serem abordados na nossa proposta de aula.

Juros Simples

No regime de juros simples, os juros, em cada época, são calculados sobre o capital inicial. Deste modo, a taxa incide sempre sobre o capital inicial e, portanto, o valor dos juros é constante. Assim, considerando que o capital inicial é C_0 e a taxa de juros simples é i, o capital após n meses será:

$$C_n = C_0 + niC_0.$$

Podemos observar que a sequência dos valores de C_n, quando n varia, formam uma Progressão Aritmética (pois iC_0 é uma constante).

Um exemplo de aplicação dos juros simples são os juros de mora. De acordo com Heraldo de Oliveira Silva, da Academia Paulista de Magistrados,

> "os juros moratórios constituem a pena imposta ao devedor pelo atraso no cumprimento da obrigação, ou no retardamento na devolução do capital alheio. Funciona como uma indenização pelo retardamento na execução do débito."

Normalmente os juros de mora são juros simples.

Juros Compostos

O regime de Juros compostos é o mais comum no dia-a-dia, no sistema financeiro e no cálculo econômico. Nesse regime, os juros gerados a cada período são incorporados ao principal para o cálculo dos juros do período seguinte.

A fórmula que expressa o montante ao fim de n períodos é dada por:

$$C_n = C_0 \left(1 + i\right)^n.$$

O regime de juros composto é mais vantajoso para o setor financeiro, visto que o montante cresce exponencialmente, enquanto que no regime de juros simples esse crescimento é linear. Tal fato não ocorre apenas quando o prazo da transação é menor do que 1. Neste caso, o regime de juros simples é mais vantajoso.

Valor Presente

Na matemática financeira consideramos que o valor do dinheiro varia de acordo com o tempo, como se estivesse sempre investido. Deste modo, só podemos efetuar operações e comparar quantias se as mesmas forem referentes à mesma época. É desta forma que podemos decidir se um pagamento, por exemplo, é mais vantajoso à vista ou à prazo: equiparando os valores numa mesma data e considerando que o dinheiro possa estar rendendo a uma determinada taxa.

Sabemos dos Juros Compostos que quando um valor C_0 é investido a uma taxa i, após n períodos de tempo, temos um montante igual a

$$C_n = C_0\,(1+i)^n$$

Observando esta fórmula sob outra ótica, chamaremos C_0 de valor presente e C_n de valor futuro após n períodos de tempo. Com simples manipulação, podemos obter o valor presente em função do valor futuro:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}.$$

Resumindo: para obter o valor futuro basta multiplicar o valor presente por $(1+i)^n$ e, para obter o valor presente, basta dividir o valor futuro por $(1+i)^n$.

A noção de valor presente será muito útil no estudo dos sistemas de amortização.

Exemplo: Um aparelho de som está anunciado em duas opções de pagamento: 3 prestações mensais de $R\$190,00$ cada, ou em 6 prestações mensais de $R\$100,00$, ambos com a primeira parcela paga no ato da compra. Qual é a opção mais vantajosa, se posso fazer render meu dinheiro a uma taxa de 5% ao mês?

Vamos ilustrar as duas situações:

- 1^a opção:

$$\begin{array}{cccc}
\text{pagamento} & 190 & 190 & 190 \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\text{data} & 0 \text{ (entrada)} & 1 \text{ mês depois} & 2 \text{ meses depois}
\end{array}$$

- 2^a opção:

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{pagamento} & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\text{data} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5
\end{array}$$

Para decidirmos a opção mais vantajosa, vamos determinar o valor do aparelho de som nas duas formas de pagamento trazendo as prestações para a mesma época, por exemplo, na data 2.

- 1^a opção

$$V = 190\,(1,05)^2 + 190\,(1,05) + 190 = 598,98$$

- 2^a opção

$$V = 100\,(1,05)^2 + 100\,(1,05) + 100 + \frac{100}{1,05} + \frac{100}{(1,05)^2} + \frac{100}{(1,05)^3} = 587,57.$$

Podemos verificar que o valor em 6 prestações é menor e, portanto, esta é a opção mais vantajosa.

Observação 3.1.1. Observe que quando temos muitos valores a serem transportados para uma determinada data e desejamos somar estes valores, é mais prático utilizar a fórmula da soma de uma PG. Por exemplo, poderíamos ter finalizado o cálculo da 2^a opção do exemplo acima da seguinte maneira:

- dados da PG: $a_1 = 100\,(1,05)^2,\;\; q = \dfrac{1}{1,05}$ e $n = 6$

$$V = 100\,(1,05)^2\,\frac{\left(\dfrac{1}{1,05}\right)^6 - 1}{\dfrac{1}{1,05} - 1} = 587,57.$$

Planos de Amortização

A amortização é um processo financeiro pelo qual uma dívida ou obrigação é paga por meio de parcelas de modo que, ao término do prazo estipulado, o débito seja liquidado. Essas prestações são a soma de duas partes: a amortização e os juros correspondentes ao saldo devedor.

Os sistemas de amortização mais usados atualmente são o SAC (Sistema de amortização constante) e a tabela PRICE (Sistema de amortização Francês).

1. SAC

   Esse sistema se caracteriza por possuir as quotas de amortização de valores iguais. Dessa maneira, as suas prestações serão decrescentes pois os juros sobre o saldo devedor irá decaindo com o passar do tempo. Esse tipo de sistema é muito utilizado pelo sistema financeiro de habitação.

- Amortização – as quotas de amortização são constantes e calculadas dividindo o valor principal inicial pelo número de período de pagamentos, isto é,

$$A_k = \frac{D_0}{n},$$

onde D_0 é a dívida inicial, n é o número de parcelas e A_k é a amortização correspondente à parcela k.

- Saldo devedor – o saldo devedor D_k após k amortizações será de

$$D_k = D_0 - k\frac{D_0}{n} = \left(1 - \frac{k}{n}\right) D_0.$$

- Juros- os juros, em uma determinada parcela k, serão determinados por

$$J_k = iD_{k-1} = i\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) D_0,$$

onde i representa a taxa de juros mensal do financiamento.

- Prestação – a prestação nesse sistema é a soma da amortização e os juros do período, ou seja,

$$P_k = A_k + J_k.$$

Exemplo: Um empréstimo de $R\$200.000,00$ será pago pelo Sistema SAC, em quatro prestações mensais, a juros efetivos de 10% a.m. Vamos construir a planilha de amortização:

mês (t)	saldo devedor $D_t = D_{t-1} - A_t$	Amortização $A_t = R_t - J_t$	Juros $J_t = iD_{t-1}$	Prestação P_t
0	200.000	–	–	–
1	150.000	50.000	20.000	70.000
2	100.000	50.000	15.000	65.000
3	50.000	50.000	10.000	60.000
4	–	50.000	5.000	55.000

2. Tabela Price

A Tabela Price é um sistema de amortização onde o valor das parcelas é constante e é muito utilizada em empréstimos bancários. Sendo n o número de parcelas, i a taxa de juros e D_0 o valor inicial da dívida, vamos calcular o valor P_k das parcelas, J_k dos juros e A_k da amortização da dívida em cada parcela, além do valor D_k da situação da dívida após o pagamento da parcela k.

- Parcelas $P_k = P$

  A equação que representa o financiamento é:

$$D_0 = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + ... + \frac{P}{(1+i)^n}.$$

  Aplicando a fórmula da soma de uma PG obtemos:

$$D_0 = \frac{P}{1+i} \frac{\left(\frac{1}{1+i}\right)^n - 1}{\frac{1}{1+i} - 1} = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

  e, portanto,

$$P_k = P = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}.$$

- Saldo Devedor D_k

  Queremos calcular o saldo devedor após o pagamento de k parcelas. Observe que o saldo devedor corresponde ao valor presente do montante após o pagamento da parcela k, isto é,

$$D_k = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + ... + \frac{P}{(1+i)^{n-k}}.$$

  Novamente, utilizando a fórmula de soma de PG obtemos:

$$D_k = P\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}.$$

  Substituindo o valor de P chegamos a:

$$D_k = D_0 \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}}.$$

- Juros J_k

  Calculamos o valor dos juros em cada parcela multiplicando a taxa pelo valor do saldo devedor anterior, ou seja,

$$J_k = iD_{k-1}.$$

- Amortização A_k

  Como cada parcela é dada pela soma dos juros e da amortização, temos que

$$A_k = P - J_k.$$

Exemplo: Um empréstimo de $R\$200.000,00$ será pago pela Tabela Price, em quatro prestações mensais postecipadas, a juros efetivos de 10% a.m. Vamos construir a planilha de amortização.

Para um determinado período, os juros são calculados sobre o saldo devedor do empréstimo ao início desse período; a amortização é a diferença entre o valor da prestação e o valor dos juros respectivos; e o saldo devedor é igual ao saldo devedor do período anterior menos a amortização do respectivo período. O quadro a seguir mostra os valores:

mês (t)	saldo devedor $D_t = D_{t-1} - A_t$	Amortização $A_t = R_t - J_t$	Juros $J_t = iD_{t-1}$	Prestação P_t
0	$200.000,00$	–	–	–
1	$156.906,00$	$43.094,00$	$20.000,00$	$63.094,00$
2	$109.502,60$	$47.403,40$	$15.690,60$	$63.094,00$
3	$57.358,86$	$52.143,74$	$10.950,26$	$63.094,00$
4	–	$57.358,86$	$5.735,89$	$63.094,00$

3.2 Plano de aula

Nesta seção apresentaremos uma proposta de aula que contempla as abordagens sobre matemática financeira que acreditamos serem indispensáveis. A aula sugerida tem intenção que os alunos adquiram ferramentas essenciais para a sua formação no campo financeiro.

Pretende-se com esta aula apresentar ao aluno situações-problema cotidianas, que ele deve se deparar como cidadão, e estimular o desenvolvimento de habilidades para solução desses problemas, podendo-se utilizar a calculadora ou outras ferramentas tecnológicas.

O público alvo desta aula deve possuir como pré-requisitos conhecimentos sobre porcentagem e progressões geométricas. Aconselhamos que aconteça uma aula introdutória em que seja apresentado o sistema de juros simples e juros compostos, para que o aluno possa aplicar os conhecimentos nos problemas mais elaborados sem tanta dificuldade.

Nos primeiros minutos da aula o aluno deverá compreender os problemas, reconhecendo e relacionando os mesmos com situações particulares. Nos minutos seguintes o aluno deverá experimentar soluções livremente, podendo utilizar as ferramentas que desejar. Finalmente, haverá discussão e apresentação das soluções.

Problema 1:

Você se esqueceu de pagar o condomínio do prédio onde mora e notou que já se passaram 20 dias do vencimento. A conta era de $R\$220,00$. Quanto você deverá pagar, se a taxa de juros de mora é de $0,04\%$ ao dia, mais multa de 2% sobre o valor da conta?

> O objetivo desse problema é trabalhar o conceito de juros simples e porcentagem, utilizando um problema bastante comum no dia a dia. Quando se ensina Juros Simples, normalmente o Professor e os livros didáticos frisam que este quase não é usado no cotidiano. Entretanto, temos aqui um exemplo que está presente na vida de muitos cidadãos que é o atraso de um pagamento. A multa é um percentual da taxa do condomínio não variando conforme o passar dos dias. Aqui o aluno deve compreender que os juros de mora são juros simples, pois os juros de cada período (dia) são calculados sempre sobre o mesmo principal que nesse caso é $R\$220,00$.

Solução:

- Juros de mora: $\dfrac{0,04}{100}220 \cdot 20 = 1,76$
- Multa: $\dfrac{2}{100}220 = 4,40$

Portanto o acréscimo será de $R\$6,16(R\$1,76 + R\$4,40)$ e, dessa forma, o valor a pagar será de $R\$226,16$.

Problema 2

Você pretende comprar uma TV de LED no valor de $R\$1761,80$, porém, se efetuar o pagamento à vista haverá um desconto de 10%. Você irá economizar durante 6 meses para adquirir essa TV.e suas economias ficarão na poupança de um banco que você confia. Considerando que a TV mantenha o mesmo valor daqui a 6 meses e a taxa de juros da poupança seja de $0,5\%$ ao mês, quanto você deve depositar por mês para que obtenha, ao final dos 6 meses, o valor para a compra da TV?

a) Deverei depositar $R\$293,64$ por mês.

b) Deverei depositar $R\$264,27$ por mês.

c) Deverei depositar $R\$260,98$ por mês.

O objetivo desse problema é trabalhar o conceito de porcentagem e juros compostos. Em sua resolução podemos usar a soma de uma P.G. finita. Esta situação problema é bastante comum na vida de um cidadão, assim como são comuns alguns erros na interpretação dos dados. Por esse motivo foi proposta uma questão de múltipla escolha, na qual as duas opções incorretas correspondiam a erros bastante usuais em problemas desse tipo. Os alunos que optaram pela letra (a) apenas dividiram o valor da TV pelos 6 meses que deveriam economizar; os que optaram pela letra (b) retiraram 10% do total e depois efetuaram a divisão pelos 6 meses. Em ambos os casos não são considerados os juros compostos da poupança.

Solução:

Podemos resolver essa questão de algumas maneiras, uma delas usando Progressão Geométrica e outra apenas o conceito de porcentagem. Utilizaremos para a solução apenas o conceito de porcentagem e ficará notório o surgimento da soma de uma PG.

- 1^o mês – Depositaremos x
- 2^o mês – $x.1,005 + x$ (O rendimento juntamente com a parcela do mês anterior mais o depósito referente ao segundo mês)
- 3^o mês – $(x.1,005 + x).1,005 + x$
- 4^o mês – $((x.1,005 + x).1,005 + x).1,005$
- 5^o mês – $(((x.1,005 + x).1,005 + x).1,005) + x$
- 6^o mês – $((((x.1,005 + x).1,005 + x).1,005) + x).1,005 + x$

Logo, ao final do 6^o mês teríamos

$$x.\left(1,005^5+1,005^4+1,005^3+1,005^2+1,005+1\right).$$

Lembramos que a televisão será paga à vista portanto haverá um desconto de 10% no valor total, sendo assim o valor a ser pago pela TV é de

$$1761,80\cdot 0,90=.$$

Dessa forma, tem-se que

$$x=\frac{1585,62}{1,005^5+1,005^4+1,005^3+1,005^2+1,005+1}=260,98$$

onde o denominador da fração é calculado por intermédio de uma soma de PG.

Para utilizar uma situação mais usual ainda no dia a dia do aluno, sugerimos que seja apresentado o seguinte problema: Você pretende comprar um automóvel no valor de R$25.017,76. Você irá economizar durante 3 anos para adquirir esse carro. Suas economias ficarão na poupança de um banco que você confia. Considerando que o carro mantenha o mesmo valor daqui a 3 anos e a taxa de juros da poupança é de 0,5 % ao mês, quanto você deve depositar por mês para que obtenha ao final de 3 anos o valor para a compra do carro?

Este tipo de problema se torna muito interessante ser resolvido por meios de recursos tecnológicos como planilhas eletrônicas, sugerimos a leitura do projeto de aula de Priscila Belota que explora os recursos tecnológicos na solução de problemas de Matemática Financeira.

Problema 3: O Estado do Rio de Janeiro oferece duas possibilidades para o pagamento anual do IPVA. O pagamento pode ser feito em 3 parcelas mensais iguais ou pela cota única, com desconto de 10% sobre a soma das parcelas. Quanto o estado cobra de Juros para financiar esse imposto?

> O objetivo desse problema é trabalhar o conceito do valor presente. Este problema é retirado de uma situação real e demonstra ao aluno que há juros embutido mesmo quando se fala em parcelamentos que aparentemente não possuem juros. Podemos observar que o problema cai numa equação do 2° grau, podendo facilmente ser resolvida algebricamente.

Solução: Sendo P a parcela, o valor total será de $3P$. Portanto, o contribuinte que pagar a vista deverá pagar 90% de $3P$. Trazendo as prestações para o momento presente, obteremos a seguinte situação

$$0,9 \cdot 3P = P + \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2}.$$

Poderíamos resolver esse somatório por uma soma de PG finita. No entanto, por se tratar de um número reduzido de parcelas, utilizaremos somente o conceito de mínimo múltiplo comum (MMC).

$$\begin{aligned}
&2,7P(1+i)^2 = P(1+i)^2 + P(1+i) + P \\
&\Longrightarrow 2,7 + 5,4i + 2,7i^2 = 3 + 3i + i^2 \\
&\Longrightarrow 1,7i^2 + 2,4i - 0,3 = 0.
\end{aligned}$$

Dessa forma, o problema recai em uma equação do segundo grau e, mais uma vez, sugerimos a utilização de calculadora para a realização dos cálculos, chegando a $i = 0,115$, ou seja, $11,5\%$.

Problema 4: Uma pessoa comprou um carro de $R\$23.000,00$, a pagar em 24 prestações mensais fixas de $R\$1170,60$ cada, caracterizando uma amortização pelo sistema Price. Logo após ter pago a décima prestação, a pessoa propõe encurtar o prazo de financiamento. Para tanto deve pagar $R\$10.000,00$ e o saldo em 4 prestações mensais iguais com a mesma taxa de juros do financiamento inicial. Sabendo que a taxa de juros iniciais é $1,6667\%$ ao mês, ela quer saber quanto falta pagar ainda do principal logo após o pagamento da décima prestação e o valor de cada uma das quatros prestações finais.

Esse problema tem por objetivo trabalhar o Sistema de amortização no ensino médio. Utilizamos nesse exemplo o Sistema Price, porém para resolvê-lo usamos somente conhecimentos adquiridos no Ensino Médio.

Solução: No sistema Price, também conhecido como sistema Francês, as parcelas são fixas e, portanto, se deslocarmos as parcelas para o tempo inicial deveremos ter

$$D_0 = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + ... + \frac{P}{(1+i)^n}.$$

Portanto, se desejarmos calcular o saldo devedor após o pagamento da parcela k deveremos deslocar as parcelas

$$D_k = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + ... + \frac{P}{(1+i)^{n-k}}$$

Note que temos uma soma de uma P.G de razão $\frac{1}{1+i}$ e, portanto, utilizando a fórmula apresentada nas preliminares desse capítulo, obtemos:

$$D_k = P\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}.$$

Dessa forma, o saldo devedor após a 10^a prestação é dado por:

$$D_{10} = 1170,60\frac{1-(1+0,016667)^{-(24-10)}}{0,016667} = R\$14.509,44.$$

É válido salientar a importância da utilização da calculadora científica para a realização do cálculo acima. Nesse sentido, é importante que o aluno aprenda a manusear essa ferramenta de tecnologia.

Continuando a resolução do problema, deste saldo devedor será dado $R\$10.000,00$ e, portanto, sua nova dívida será de $R\$4.509,44$. Note que esse valor, a ser pago em 4 parcelas iguais, a uma taxa de juros de $1,6667\%$, corresponde a seguinte valor presente:

$$4509,44 = \frac{P}{1,016667} + \frac{P}{1,016667^2} + \frac{P}{1,016667^3} + \frac{P}{1,016667^4}$$

e, portanto,

$$P = \frac{4509,44}{\frac{1}{1,016667} + \frac{1}{1,016667^2} + \frac{1}{1,016667^3} + \frac{1}{1,016667^4}}.$$

Note que o denominador da expressão acima é a soma de uma PG de razão $\frac{1}{1,016667}$. Assim, segue da fórmula dessa soma, com a utilização de uma calculadora científica, que

$$P = R\$1.174,72.$$

É importante ressaltar que todos os problemas aqui apresentados são perfeitamente adaptáveis a sala de aula porém possuem uma abrangência maior dos conteúdos do Ensino Médio. O aluno não simplesmente aplicará fórmulas, ele deverá ser estimulado a pensar e desenvolver melhores meios para obter a solução de cada problema.

Concluímos essa proposta de aula, destacando que apresentamos aqui um problema para a exploração de cada conteúdo. No entanto, a nossa proposta se constitui na apresentação de uma filosofia de aula e é bastante salutar que o professor busque novos exemplos, igualmente contextualizados e concretos, para que o aluno tenha uma maior fixação dos conteúdos apresentados.

4 Considerações Finais

Encerramos nosso trabalho com a esperança de ter contribuído com ideias e motivações para o ensino de matemática financeira, e que consigam aplicar em suas turmas estas ou outras propostas igualmente fundamentadas sempre buscando mostrar a importância da Matemática Financeira na formação do aluno como cidadão.

Desta forma acreditamos obter mais um sucesso na formação dos nossos alunos, trazendo para a sala de aula a vida real sem máscaras, e dando subsídios para que eles finalmente apliquem seus conhecimentos no cotidiano e utilizando sabiamente as ferramentas disponíveis. Muito de nós, professores, precisamos superar as deficiências de nossa formação em busca de uma educação mais adequada para o nosso aluno, ensinando-os a serem mais críticos com o uso do dinheiro. Finalizamos com duas citações do grande filósofo e educador brasileiro Paulo Freire:

> "A teoria sem a prática vira 'verbalismo', assim como a prática sem teoria, vira ativismo. No entanto, quando se une a prática com a teoria tem-se a práxis, a ação criadora e modificadora da realidade."
>
> "É fundamental diminuir a distância entre o que se diz e o que se faz, de tal forma que, num dado momento, a tua fala seja a tua prática".

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL, Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei 9394/1996.

[2] BRASIL, Secretaria da Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[3] Dante, L.R., *Matemática - Volume Único*, 1^a Ed. São Paulo: Ática, 2005.

[4] GOULART, M.C. *Matemática no Ensino Médio*, São Paulo: Scipione, 1999.

[5] Lima, E., Carvalho, P.C., Morgado, A., Wagner, E., *A Matemática do Ensino Médio, vol. 2*, 6^a Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[6] Nasser, L., *Matemática Financeira para a escola básica: uma abordagem prática e visual*, 2^a Ed. Projeto Fundão/UFRJ. Rio de Janeiro, 2012.

[7] PAIVA, M., *Matemática, Volume único* 1^a Ed. São Paulo: Moderna, 1999.

[8] Porta do Professor - Ministério da Educação 2008, disponível em http://portaldoprofessor.mec.gov.br (acessado em 23/03/2013)

[9] SAMANEZ, C.P. *Matemática Financeira: Aplicações à Análise de Investimentos*, 3^a Ed. São Paulo: Prentice Hall, 2002

[10] dos SANTOS, C.A.M., GENTIL, N., GRECO, S.E. *Matemática. Novo Ensino Médio*, 7^a Ed. São Paulo: Ática ,2003.

[11] Silva, H.O., *Os Juros Moratórios sob a Égide do Novo Código Civil*, disponível em http://www.apmbr.com.br (acessado em 23/03/2013)

[12] SMOLE, K.C.S., DINIZ, M.I.S.V. *Matemática Ensino Médio, Volume 2* 6^a Ed. São Paulo: Saraiva, 2010.